نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی : زمان آزمون :

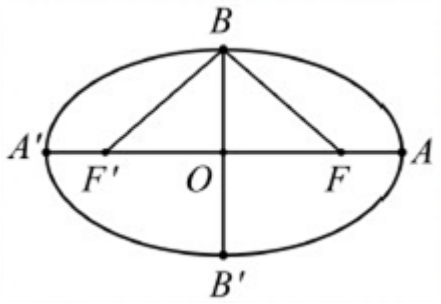
نام دبیر : تاریخ برگزاری ۱۴۰۵/۰۳/۰۴

عنوان آزمون : ۱۲ریاضی-دوشنبه۴خرداد-تشریحی

۱ در نقطهٔ $A(-۱, ۰)$ روی دایرهٔ $(x-۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۲ در بیضی مقابل با کانون‌های F, F'، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است.
اندازهٔ زاویهٔ $\widehat{OFB}$ را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۳ معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(۱, -۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $۴x-۳y=۲$ وتری به طول ۶ جدا کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۴ سهمی به معادله $y^۲-۴x=۴y$ داده شده است. مختصات رأس و کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۵ سهمی به معادله $y^۲=-۲x-۴y$ مفروض است.
الف) معادله متعارف (استاندارد) سهمی را بنویسید.
ب) مختصات رأس و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۶ معادله مکان هندسی مرکز دایره‌های به شعاع ۱ را بیابید که بر دایره به معادله زیر مماس باشند:

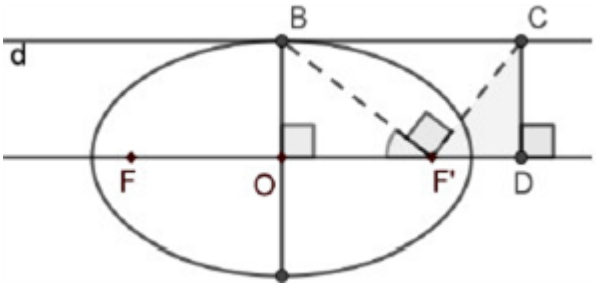
$$x^۲+y^۲-۴x+۲y=۴$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی دوازدهم-اردیبهشت۱۴۰۴

۷ خروج از مرکز بیضی روبه‌رو برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و قطر کوچک آن ۲ است، خط d از نقطهٔ B موازی قطر بزرگ بیضی رسم شده است و پاره‌خط‌های $F'C$ و BF' بر هم عمود هستند. پاره‌خط CD موازی قطر کوچک بیضی رسم شده است.

الف) زاویهٔ $\widehat{BF'O}$ چند درجه است؟

ب) مساحت مثلث $F'CD$ را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی دوازدهم-اردیبهشت۱۴۰۴

۸ اندازهٔ وتری که دایره $C: x^۲ + y^۲ - ۸x = ۳۴$ روی خط $۳x - ۴y + ۱۳ = ۰$ جدا می‌کند را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی دوازدهم-اردیبهشت۱۴۰۴

۹ یک آینه مقعر سهمی شکل داریم، (بیرون سهمی جیوه اندود و داخل سهمی آینه است.) که مختصات کانون نقطه $(-۳, ۲)$ و معادله خط هادی آن $x = ۱$ است.

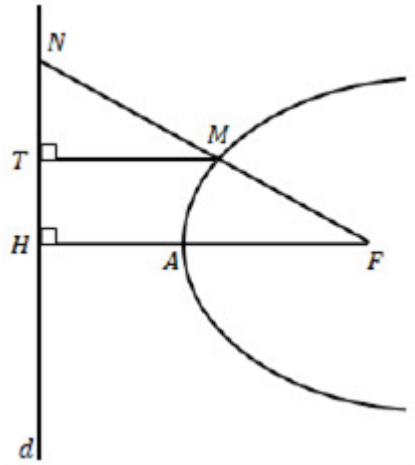
الف) معادله سهمی را بنویسید.

ب) اگر پرتو نوری در داخل سهمی از کانون عبور کند و در نقطه به طول ۳- با سهمی برخورد کند، معادلهٔ پرتوی بازتابش را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی دوازدهم-اردیبهشت۱۴۰۴

۱۰ در شکل مقابل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در نقطه N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.

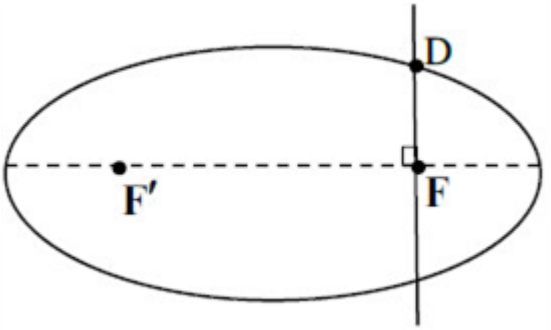
ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۱۱ بیضی با قطر بزرگ $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطه D قطع کند، ثابت کنید:

$$DF = \frac{b^۲}{a}$$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۱۲ در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۰

۱۳ نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. بحث کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۴ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله واز C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹

۱۵ الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی $x^۲ - ۴y + ۸x = ۰$ را به دست آورید.
ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹

۱۶ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۱۷ نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (درباره تعداد جواب‌های مسأله بحث کنید.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۱۸ نقاط A و B و C در یک صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از نقاط A و B به یک فاصله بوده و از نقطه C به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد (در مورد تعداد جواب‌های ممکن بحث کنید.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۱۹ نقاط $B(-۱, ۲)$ و $B'(-۱, -۴)$ دو سر قطر کوچک یک بیضی با فاصله کانونی $۲\sqrt{۳}$ واحد است. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۲۰ معادله سهمی با کانون $F(۱, ۲)$ و خط هادی $x = -۳$ را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

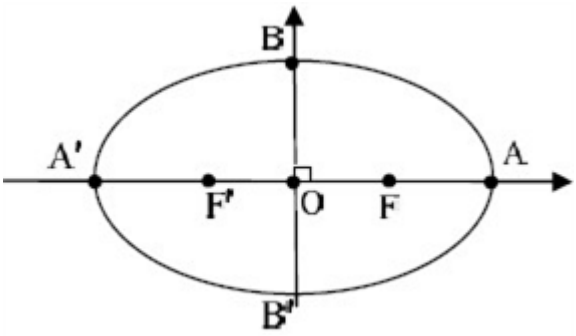
۲۱ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۱, ۰)$ مرکز آن بوده و بر خط $x = -۳$ مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۲۲ الف) معادله متعارف و فاصله کانونی سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۲y - ۸x + ۹ = ۰$ را بیابید.
ب) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۲۳ مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۲۴ مختصات کانون، رأس و معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله $y^۲ - ۶y + ۱۶x + ۲۵ = ۰$ را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۲۵ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰, ۱)$ باشد و با دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۸x + ۴y + ۱۶ = ۰$ مماس داخل باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱

$O(۱,۴) \qquad m_{OA} = ۲ \Rightarrow m' = -\frac{۱}{۲}$

$y - ۰ = -\frac{۱}{۲}(x+۱)$ یا $y = -\frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲}$ یا $x + ۲y = -۱$

۲ راه‌حل اول:

$$a = ۲b \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b, \tan(\widehat{OFB}) = \frac{OB}{OF} = \frac{b}{\sqrt{۳}b} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \widehat{OFB} = ۳۰^\circ$$

راه‌حل دوم:

$$a = ۲b \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b, \tan(\widehat{OBF}) = \frac{OF}{OB} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \Rightarrow \widehat{OBF} = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OFB} = ۳۰^\circ$$

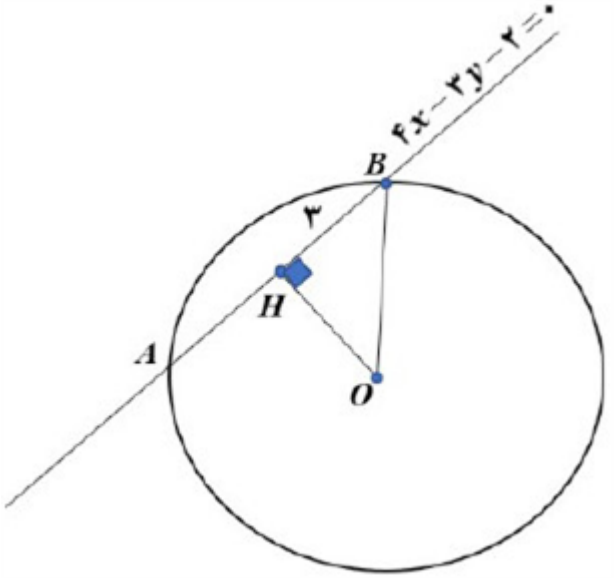
راه‌حل سوم:

$$a = ۲b, \text{Cos}(\widehat{OBF}) = \frac{OB}{BF} = \frac{b}{a} = \frac{b}{۲a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \widehat{OBF} = ۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{OFB} = ۳۰^\circ$$

راه‌حل چهارم:

$$a = ۲b, \text{Sin}(\widehat{OFB}) = \frac{OB}{BF} = \frac{b}{a} = \frac{b}{۲b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \widehat{OFB} = ۳۰^\circ$$

۳ شعاع عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند، لذا $HB = ۳$. (یا تعیین HB روی شکل)



$$OH = \frac{|۴ + ۳ - ۲|}{\sqrt{۱۶ + ۹}} = \frac{۵}{۵} = ۱ \Rightarrow r^۲ = OH^۲ + HB^۲ = ۱ + ۹ = ۱۰$$

معادلهٔ دایره: $(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۱۰$

۴

$$y^۲ - ۴y = ۴x \Rightarrow y^۲ - ۴y + ۴ = ۴x + ۴ \Rightarrow (y-۲)^۲ = ۴(x+۱)$$

لذا سهمی فوق یک سهمی افقی رو به راست می‌باشد و در آن داریم:

$$\begin{cases} x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ y - ۲ = ۰ \Rightarrow y = ۲ \end{cases} \Rightarrow S(-۱,۲) \text{ راس سهمی}, ۴a = ۴ \Rightarrow a = ۱$$

$F(۰,۲)$ کانون, $x = -۲$ خط هادی

۵

الف) $y^۲ = -۲x - ۴y \Rightarrow y^۲ + ۴y + ۴ = -۲x + ۴ \Rightarrow (y+۲)^۲ = -۲(x-۲)$

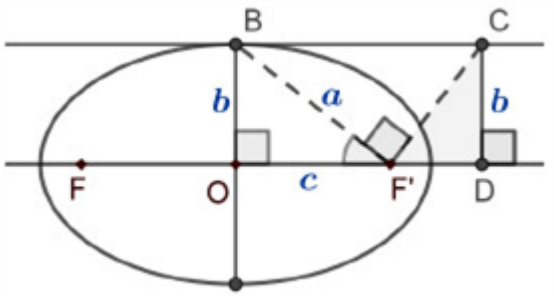
ب) $\begin{cases} A(۲,-۲) \\ ۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \end{cases} \quad x = \frac{۵}{۲}$

۶

مکان هندسی حاصل دو معادله دایره است با مرکز $(۲,-۱)$ و شعاع‌های ۴ و ۲.

معادلات آنها برابر است با $(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۱۶$ و $(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۴$

۷



الف) $\Delta BOF' : \text{Cos}\,\widehat{BF'O} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \widehat{BF'O} = ۴۵^\circ$

ب) با توجه به شکل $\widehat{CF'D} = ۴۵^\circ$ و مثلث $F'CD$ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

$\Delta DCF' : CD = DF' = b = ۱ \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} F'D \times DC = \frac{۱}{۲}$

۸

$C : (x-۴)^۲ + y^۲ = ۵۰ \Rightarrow O = (۴,۰), r = \sqrt{۵۰}$

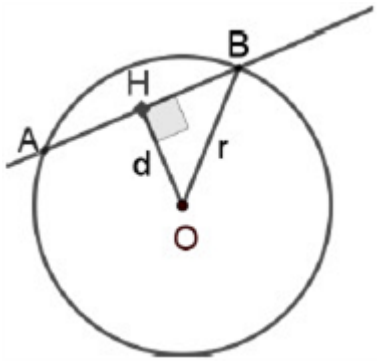
فاصله مرکز دایره تا خط برابر است با:

$$OH = \frac{|۳(۴) - ۴(۰) + ۱۳|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۲۵}{۵} = ۵$$

قطر عمود بر وتر آن را نصف می‌کند. بنابر رابطه فیثاغورس در مثلث داریم:

$BH^۲ + OH^۲ = OA^۲ \Rightarrow BH^۲ + ۲۵ = ۵۰ \Rightarrow AH = ۵$

$\Rightarrow AB = ۲BH = ۱۰$



۹

الف) $\begin{cases} A(-۱,۲) \\ a = ۲ \end{cases} \Rightarrow (y-۲)^۲ = -۸(x+۱)$

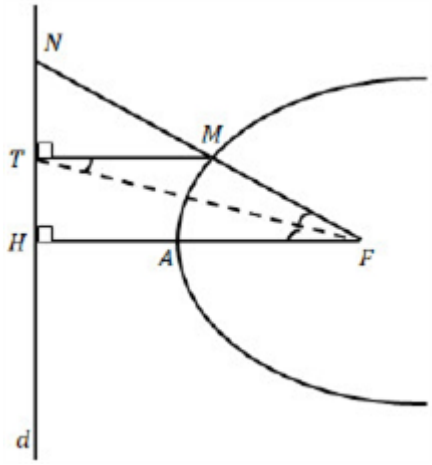
ب) پرتویی که در داخل سهمی از کانون عبور کند، به موازات محور کانونی سهمی $y = ۲$ بازتاب می‌کند. بنابراین پرتوهای بازتابش موازی این خط هستند.

$(y-۲)^۲ = -۸(x+۱) \xrightarrow{x=-۳} \begin{cases} P : (-۳,۲) \\ P' : (-۳,۶) \end{cases} \Rightarrow y = ۶, y = -۲$

۱۰ بنا به تعریف سهمی $MT = MF$ و لذا مثلث MFT متساوی‌الساقین است پس $\widehat{MFT} = \widehat{MFT}$ از طرفی $FH \parallel MT$ و FT خط مورب می‌باشد پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\widehat{MTF} = \widehat{TFH}$ از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که TF نیمساز زاویهٔ $\widehat{NFH}$ می‌باشد.

با استفاده از قضیهٔ نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NH}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$



۱۱ نقطه D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی: $DF + DF' = ۲a$

در مثلث قائم‌الزاویه DFF' بنا به قضیه فیثاغورث داریم:

$$DF^۲ + FF'^۲ = DF'^۲ \Rightarrow DF^۲ + (۲c)^۲ = (۲a - DF)^۲$$

$$DF = \frac{a^۲ - c^۲}{a} \xrightarrow{a^۲-c^۲=b^۲} DF = \frac{b^۲}{a}$$

۱۲ اگر قطر دهانه دیش را با $۲r$ و گودی را با h نمایش دهیم. فاصله کانونی برابر $a = \frac{۴r^۲}{۱۶h}$ است.

$۲r = ۶۰, h = ۹$ با جایگذاری در رابطه فوق داریم: $a = \frac{(۲r)(۲r)}{۱۶h} = \frac{۶۰ \times ۶۰}{۱۶(۹)} = ۲۵$

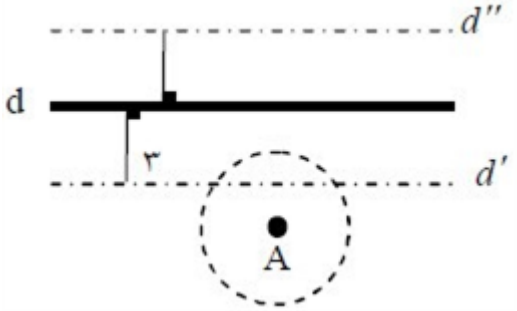
(اگر رابطه فوق به صورت $a = \frac{r^۲}{۴h} = \frac{(۳۰)^۲}{۴(۹)} = ۲۵$ نوشته شود درست است.)

۱۳ مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است این دایره را رسم می‌کنیم. نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد دو خط d', d'' در طرفین خط d و به موازات d است این دو خط را رسم می‌کنیم محل برخورد دو خط d', d'' با دایره مطابق شکل جواب مسأله است.

اگر یکی از دو خط d' یا d'' دایره را قطع کند مساله ۲ جواب دارد.

اگر یکی از دو خط d' یا d'' بر دایره مماس باشد مساله ۱ جواب دارد.

اگر هیچ‌یک از دو خط d' یا d'' دایره را قطع نکند مساله جواب ندارد.

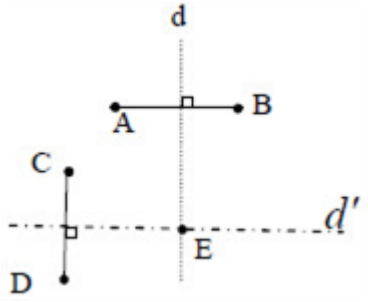


۱۴ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را d می‌نامیم و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط CD است این خط را 'd می‌نامیم. بنابراین نقطه برخورد خطوط d و 'd جواب مسئله است. (نقطه E)

اگرخطوط d و 'd متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد.

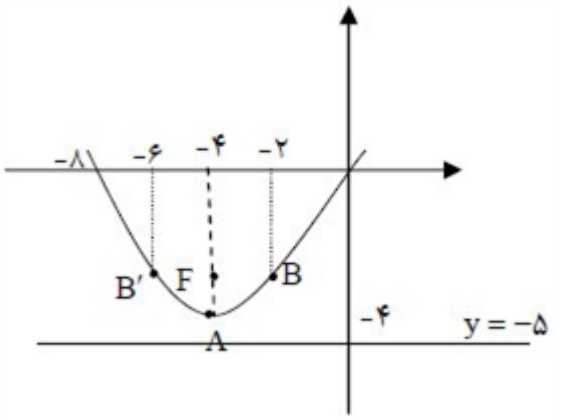
اگرخطوط d و 'd منطبق باشند مسئله بی‌شمار جواب دارد.

اگرخطوط d و 'd موازی باشند مسئله جواب ندارد.



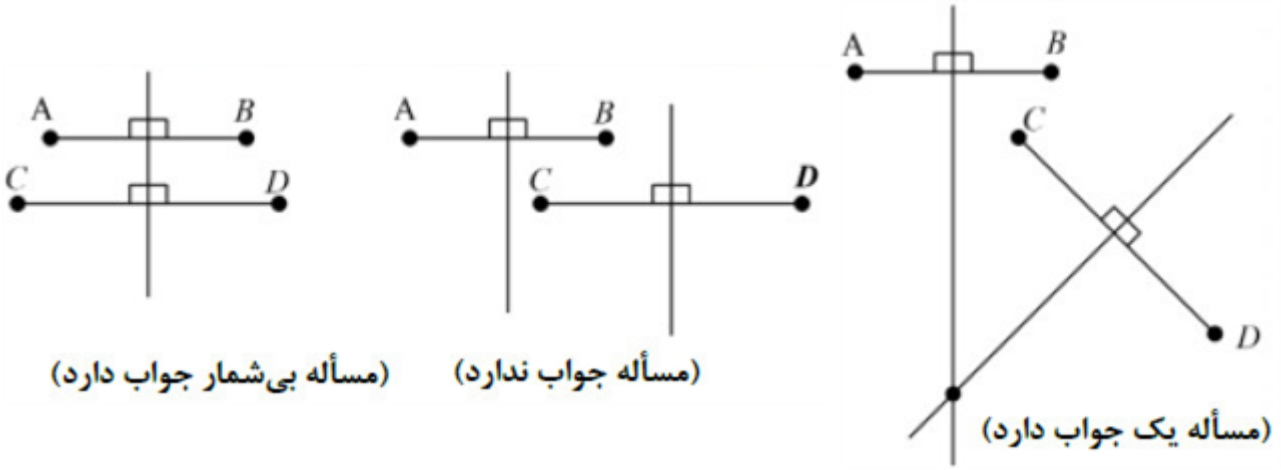
۱۵ الف) فرم استاندارد سهمی به صورت $(x+۴)^{۲}=۴(y+۴)$ است. سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا باز می‌شود. راس سهمی نقطه $A(-۴,-۴)$ است و $a=۱$، مختصات کانون آن نقطه $F(-۴,-۴+۱)=(-۴,-۳)$ است. معادله خط هادی سهمی به صورت $y=-۴-۱=-۵$ است.

ب) نقاط کمکی $B(-۲,-۳)$ و $B'(-۶,-۳)$



رسم سهمی با استفاده از نقاط کمکی

۱۶ مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آنها از نقاط A و B به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف AB قرار دارند.
مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آنها از نقاط C و D به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف CD قرار دارند.
محل برخورد دو عمودمنصف جواب مسأله است.
بحث: حالت اول: اگر دو عمودمنصف موازی باشند، مسأله جواب ندارد.
حالت دوم: اگر دو عمودمنصف بر هم منطبق باشند، مسأله بی‌شمار جواب دارد.
حالت سوم: اگر دو عمودمنصف متقاطع باشند، مسأله یک جواب دارد.
توجه: در صورت پاسخگویی ترسیمی و بیان حالات بحث (به صورت رسم شکل) نمره کامل منظور گردد.



۱۷ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله $۲\ \text{cm}$ باشند، دایره‌ای به مرکز A با شعاع $۲\ \text{cm}$ می‌باشد و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله $۳\ \text{cm}$ باشند، دو خط L و L' موازی با d و به فاصله $۳\ \text{cm}$ از آن هستند.
نقطه برخورد آن دایره با این دو خط موازی (L و L')، جواب مسأله است.
بحث در وجود جواب:
حالت اول: دایره یکی از خطوط L یا L' را در دو نقطه قطع می‌کند. در این حالت مسأله دو جواب دارد.
حالت دوم: دایره بر یکی از خطوط L یا L' مماس است. در این حال مسأله یک جواب دارد.
حالت سوم: دایره هیچ یک از خطوط L یا L' را قطع نمی‌کند. در این حالت مسأله فاقد جواب است.

۱۸ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله $۲\ \text{cm}$ باشند، دایره‌ای به مرکز نقطه C و شعاع $۲\ \text{cm}$ است.
<u>فصل مشترک</u> دو مکان هندسی مورد نظر جواب مسأله است.
الف) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB دایره به مرکز C و شعاع $۲\ \text{cm}$ را قطع کند، مسأله <u>دو</u> جواب دارد.
ب) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB دایره به مرکز C و شعاع $۲\ \text{cm}$ مماس باشد، مسأله <u>یک</u> جواب دارد.
پ) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB دایره به مرکز C و شعاع $۲\ \text{cm}$ را قطع نکند، مسأله <u>فاقد</u> جواب است.

۱۹
$$BB' = ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳\ ,\ ۲c = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow c = \sqrt{۳}$$
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۳^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = ۱۲ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow AA' = ۲a = ۴\sqrt{۳}$$

۲۰
$$F(\alpha + a, \beta) = (۱, ۲) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + a = ۱ \\ \beta = ۲ \end{cases}$$ (ص ۵۲ و ۵۸)
$$\left.\begin{matrix} x = \alpha - a \\ x = -۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha - a = -۳ \xrightarrow{\alpha + a = ۱} \begin{cases} a = ۲ \\ \alpha = -۱ \end{cases}$$
$$(y - ۲)^۲ = ۸(x + ۱)$$
روش دوم: برای حل مسأله با استفاده از شکل، نمره لحاظ گردد.

۲۱ روش اول:

$$OH = \frac{|۱ + ۳|}{\sqrt{۱^۲ + ۰^۲}} = ۴, OH = R, (x - ۱)^۲ + y^۲ = ۱۶$$

روش دوم: با استفاده از رسم شکل و پیدا کردن شعاع و نوشتن معادله دایره (ص ۴۳)

۲۲ الف) معادله متعارف سهمی $(y - ۱)^۲ = ۸(x - ۱)$ و فاصله کانونی $a = ۲$

ب) رأس سهمی $(۱, ۱)$ معادله خط هادی $x = -۱$ و مختصات کانون آن $(۳, ۱)$ (ص ۵۵)

۲۳

$$OF = c = ۴, OA = a = ۸ \Rightarrow b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸ \Rightarrow b = ۴\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow ۲b = ۸\sqrt{۳}$$

۲۴ فرم استاندارد سهمی به صورت $(y - ۳)^۲ = -۱۶(x + ۱)$ است. سهمی افقی و دهانه سهمی به سمت چپ باز می‌شود. راس سهمی نقطه $A(-۱, ۳)$ است. و $a = ۴$ مختصات کانون آن نقطه $F(-a + h, k) = (-۵, ۳)$ است.

معادله خط هادی سهمی به صورت $x = a + h = -۱$ است.

۲۵

$$(x - ۴)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۴ \Rightarrow O'(۴, -۲), r' = ۲$$

$$OO' = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵$$

$$|r - r'| = OO' \Rightarrow |r - ۲| = ۵ \Rightarrow \begin{cases} r = ۷ \\ r = -۳ \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow x^۲ + (y - ۱)^۲ = ۴۹$$