



نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

زمان آزمون :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۵/۰۲/۳۱

عنوان آزمون : ۱۲ ریاضی - پنجشنبه ۳۱ اردیبهشت - تست تکمیلی



۱ حاصل ضرب درجات رأس‌های گرافی با ۱۲ رأس برابر ۵ است. تعداد عضوهای مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال غیرمینیم این گراف کدام عدد می‌تواند باشد؟

۴ ۹ یا ۱۰

۳ ۸ یا ۹

۲ فقط ۹

۱ فقط ۸

آزمون‌های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲ حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G برابر ۴۳۲ است. اگر گراف G با حداقل تعداد یال رسم شود، حاصل $\delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام است؟

۴ ۲۳

۳ ۲۱

۲ ۲۹

۱ ۳۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳ اگر به ازای هر $x, y \in V(G)$ داشته باشیم $N_G[x] = N_G[y]$ و مجموع مرتبه و اندازه این گراف ۲۱ باشد، آنگاه حاصل $\delta + \Delta + pq$ در این گراف کدام است؟

۴ ۱۱۰

۳ ۱۰۰

۲ ۹۰

۱ ۸۰

آزمون‌های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۴ در گراف G، مجموعه همسایگی بسته هر رأس دارای ۳ عضو است. اگر $q(\bar{G}) = 3q(G)$ باشد، مقدار $p(G) + q(G) + \Delta(G) + \delta(G)$ کدام است؟

۴ ۲۵

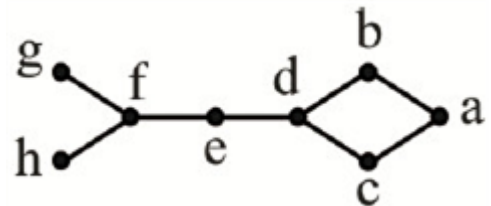
۳ ۲۲

۲ ۲۷

۱ ۲۰

آزمون‌های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۵ گراف شکل مقابل، چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال غیرمینیم دارد؟



۴ ۶

۳ ۵

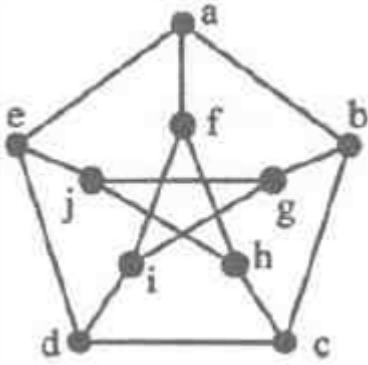
۲ ۴

۱ ۳

آزمون‌های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱_۱۴۰۰



۶ شکل مقابل معروف به گراف پترسن (Petersen graph) است. این گراف چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟



- ۸ ۴ ۱۰ ۳ ۱۵ ۲ ۱۲ ۱

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۷ در گراف G ، مجموعه همسایگی باز هر رأس دارای ۲ عضو است. اگر $q(\overline{G}) = 3q(G)$ باشد، مقدار $p(G)$ کدام است؟

- ۹ ۴ ۸ ۳ ۶ ۲ ۵ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸ در گرافی با دنباله‌ی درجه رأس‌ها به صورت ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۴ و ۴، تعداد دورها با طول ۵، کدام است؟

- صفر ۴ ۳ ۳ ۲ ۲ ۱ ۱

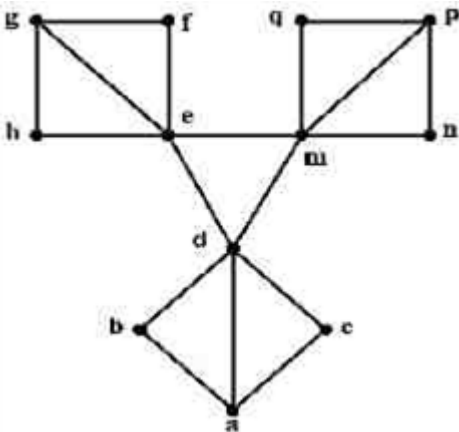
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹ اگر در یک گراف از مرتبه ۱۱ و اندازه ۱۹، یک رأس از درجه ۲ $\delta = 2$ و دو رأس از درجه ۵ $\Delta = 5$ باشد، چند رأس از درجه ۱ $\Delta - 1$ دارد؟

- ۳ ۴ ۲ ۳ ۱ ۲ ۰ ۱

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۹۹-۰۰

۱۰ در گراف زیر، تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر مینیمال، کدام است؟



- ۳ ۴ ۴ ۳ ۶ ۲ ۸ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱ درجه‌ی رأس‌های یک گراف ۵، ۴، ۴، ۳، ۳ و ۱ است. چند دور با طول ۴، موجود است؟

- ۹ ۴ ۸ ۳ ۷ ۲ ۶ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۱۲ در یک گراف با درجه‌ی رأس‌های ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، تعداد دورها با طول ۳، کدام است؟

۴ ۶

۳ ۵

۲ ۴

۱ ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۳ گراف ساده G ، 7 -منتظم است و در آن $q = 2p + 7$. $(p$ مرتبه و q اندازه گراف است). چند یال به G اضافه کنیم تا به یک گراف کامل تبدیل شود؟

۴ ۵۶

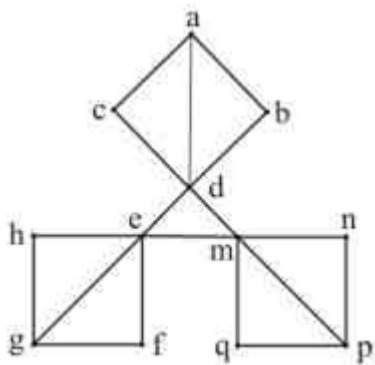
۳ ۴۲

۲ ۱۹

۱ ۱۷

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

۱۴ در گراف شکل زیر، تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر مینیمال کدام است؟



۴ ۶

۳ ۸

۲ ۲۴

۱ ۲۷

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

۱۵ گراف ناهمبند ۳-منتظم دارای ۱۲ یال است. این گراف چند دور با طول ۴ دارد؟

۴ ۸

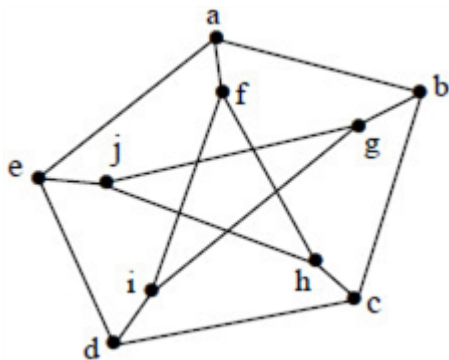
۳ ۶

۲ ۴

۱ ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۶ گراف مقابل، چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم شامل رأس a دارد؟



۴ ۴

۳ ۳

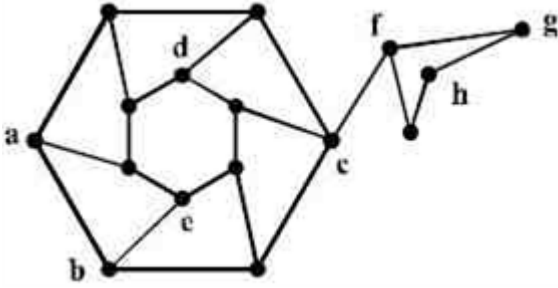
۲ ۲

۱ ۱

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳



۱۷ کدام مجموعه، برای گراف روبه‌رو، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال است؟



{a, c, e, d, g} ۴

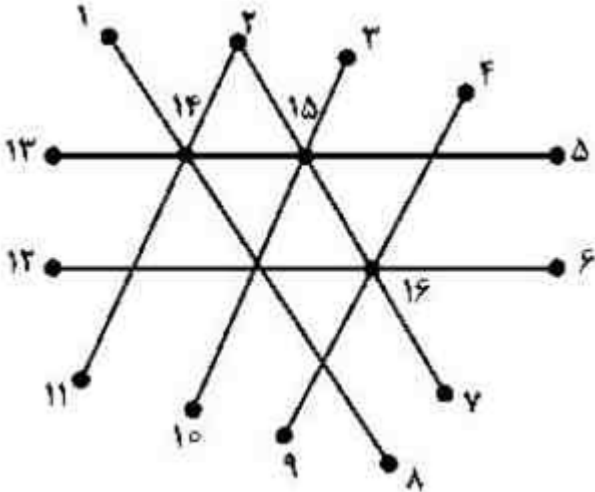
{a, c, e, d, h} ۳

{b, c, e, d, g} ۲

{a, b, c, d, h} ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸ برای گراف زیر، عدد احاطه‌گری مینیمال کدام است؟



۵ ۴

۴ ۳

۳ ۲

۲ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

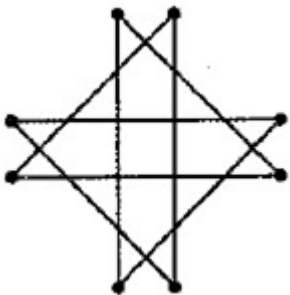
۱۹ هفت نفر در یک کلاس هستند و برخی از آن‌ها با یکدیگر دست می‌دهند. اگر ۶ نفر از آن‌ها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده باشند، آن‌گاه کدام مورد درست است؟

۱ نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد. ۲ نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۶ نفر دست داده باشد.

۳ نفر هفتم حداقل با ۵ نفر دست داده است. ۴ نفر هفتم حداکثر با ۶ نفر دست داده است.

آزمون‌های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

۲۰ عدد احاطه‌گری گراف مکمل گراف مقابل کدام است؟



۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

آزمون‌های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲



۲۱ مقدار $\chi(G)$ برای گراف زیر کدام است؟



۲ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۲۲ حاصل جمع $\chi(K_{29}) + \chi(P_{29}) + \chi(C_{29})$ با توجه به تعریف عدد احاطه‌گری و گراف‌های کامل، خطی و تک‌حلقه‌ای ۲-منتظم کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۱ (۳)

۲۰ (۲)

۱۹ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۲۳ در یک گراف ساده با درجه رأس‌های ۲، ۲، ۳، ۳، ۴، ۴ که دو رأس با می‌نیمم درجه مجاورند، تعداد دورها با طول ۶ کدام است؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۴ اگر درجه‌ی دو رأس یک درخت مرتبه‌ی ۸، برابر ۳ و ۵ باشد، تعداد رئوس با درجه‌ی ۲ از درخت موردنظر، کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۵ کوچک‌ترین اندازه‌ی گراف ساده همبند از مرتبه ۸ که بزرگ‌ترین درجه‌ی رئوس آن ۴ باشد، کدام است؟

۷ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

۲۶ اگر $(\frac{1}{2})^b = 25$ ، $(\frac{1}{4})^a = 2\sqrt[3]{32}$ باشد، آنگاه حاصل $\text{Log} \frac{112ab}{2649}$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۷ اگر مقادیر تقریبی $\text{Log} \frac{5}{3} = 1/5$ و $\text{Log} \frac{3}{2} = 1/6$ باشد، حاصل $\text{Log} \frac{6}{15}$ کدام است؟

۰/۵۵ (۴)

۰/۶۵ (۳)

۰/۷۵ (۲)

۰/۸۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۲۸ حاصل ضرب جواب‌های معادله $\text{Log} \left(x^{\text{Log} \frac{x}{4}} \right) + \text{Log} \sqrt[4]{x} = 4$ کدام است؟

$\frac{1}{64}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

۴ (۲)

۶۴ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۹ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های حقیقی معادله $\text{Log}(4^x + 1) = (x - 2) \text{Log} 2 + 1$ باشند، حاصل $|x_1| + |x_2|$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۳۰ اگر p برابر حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\text{Log} \frac{x^3}{p} + \text{Log} \frac{3}{x} - 4 = 0$ باشد، مقدار $\text{Log} p$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

۳۱ حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(\sqrt{x})^{\left(\text{Log} \frac{x}{5} - 1\right)} = 5$ کدام است؟

۵ (۴)

۴۰ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

۳۲ اگر به ازای $x > 1$ و $y > 1$ معادله $\text{Log} \frac{y}{x} - 2 \text{Log} \frac{x}{y} = 1$ برقرار و $y = f(x)$ جواب معادله باشد، آن‌گاه حاصل $(f + f^{-1})(9)$ کدام است؟

۱۲ (۴)

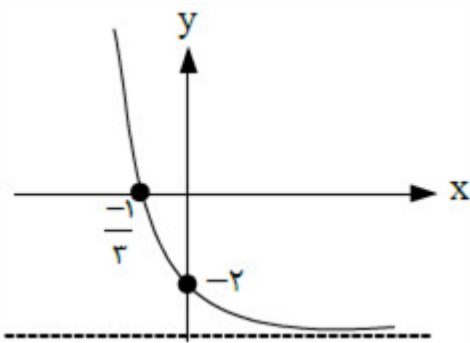
$\frac{4}{9}$ (۳)

۸۴ (۲)

$\frac{2}{9}$ (۱)

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

۳۳ شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = 2^{ax+b} - 4$ است. $f\left(\frac{-7}{3}\right)$ کدام است؟



۵۰۸ (۴)

۲۵۲ (۳)

۱۳۴ (۲)

۶۰ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰



۲۴

نوعی ویروس می‌تواند هر ۳ ساعت خود را ۵ برابر تکثیر نماید. اگر ابتدای تکثیر ۲۰۰ عدد ویروس وجود داشته باشد، تقریباً پس از چند ساعت تعداد ویروس‌ها به ۲ میلیون عدد می‌رسد؟ $(\text{Log } 2 = 0.3)$

- ۱۹ ۴
- ۱۸ ۳
- ۱۷ ۲
- ۱۶ ۱

آزمون‌های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱_۱۴۰۰

۲۵

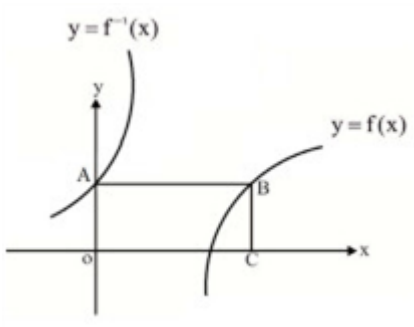
تابع $f(x) = \sqrt{2^{ax+b}}$ از نقطه $(\frac{1}{2}, 1)$ عبور می‌کند. اگر $f^{-1}(8) = 5$ باشد، حاصل $a - b$ چقدر است؟

- ۳ ۱
- ۲ ۲
- ۱ ۳
- صفر ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۶

در شکل مقابل، $f(x) = \text{Log}(\frac{x}{2})$ می‌باشد. مساحت مستطیل OABC کدام است؟



- ۲۴ ۱
- ۲ ۲
- ۳ ۳
- ۴ ۴

آزمون‌های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۹۹_۰۰

۲۷

اگر $\text{Log}_{18} a = 6$ باشد، حاصل $\text{Log}_{12} 4$ کدام است؟

- ۴ ۱
- ۲ ۲
- ۳ ۳
- ۴ ۴

آزمون‌های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۹۹_۰۰

۲۸

اگر $\text{Log}_3 \frac{5}{8} = \frac{2}{8}$ باشد، آن‌گاه $\text{Log}_{18} 8$ ، کدام است؟

- ۱۵ ۱
- ۷ ۲
- ۱۱ ۳
- ۴ ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۹

از دو معادله‌ی دو مجهولی $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\text{Log}(x + 2y) = 1 + \text{Log } y$ ، مقدار x کدام است؟

- ۱/۲ ۱
- ۱/۴ ۲
- ۱/۵ ۳
- ۱/۶ ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۰

نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = A(2)^{Bx}$ و خط به معادله‌ی $4y = 5x$ ، در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ متقاطع هستند. مقدار $f^{-1}(10)$ ، کدام است؟

- ۳ ۱
- ۵ ۲
- ۶ ۳
- ۸ ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۴۱ اگر $8^{x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-2} + 3^{9x-4}$ آنگاه حاصل $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{-2+\text{Log } \frac{9}{5}}$ کدام است؟

۲۵۳ (۴)

۲۵۰ (۳)

۲۴۳ (۲)

۲۴۰ (۱)

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۴۲ حاصل $f(3) + g\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ کدام است اگر شیب و عرض از مبدأ نمودار تابع خطی $f(x)$ به ترتیب برابر کمترین و

بیشترین مقدار تابع $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \sin \frac{x}{3} - 2}$ باشد؟

۵۶ (۴)

۵۴ (۳)

۴۲ (۲)

۴۰ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱

۴۳ نمودار وارون تابع $f(x) = 5^x - 5$ ، از کدام ناحیه مختصات عبور نمی‌کند؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱

۴۴ در معادله $\text{Log } \frac{m}{\sqrt{3}} + \text{Log } \frac{x^3}{3} - 4 = 0$ ، ریشه‌ی بزرگ‌تر، m برابر ریشه‌ی کوچک‌تر است. مقدار $\text{Log } \frac{m}{\sqrt{3}}$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۹۹-۰۰

۴۵ فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد توابع $f(x) = 4^x$ و $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ از خط $3x + 2 = 4y$ ، کدام است؟

$4/2$ (۴)

$2/2$ (۳)

۲ (۲)

$0/4$ (۱)

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۹۹-۰۰

۴۶ کدام عبارت برای تعداد ریشه‌های معادله $2^x = x^2$ ، درست است؟

(۱) معادله در بازه $[-1, 0]$ فاقد ریشه است. (۲) معادله در بازه $[-1, 0]$ یک ریشه دارد.

(۳) معادله در بازه $[-1, 0]$ دو ریشه دارد. (۴) معادله در بازه $[-1, 0]$ بیش از دو ریشه دارد.

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۷ اگر $3^{x^2-2} = 81^x$ باشد، $\text{Log } \frac{(x-2)}{6}$ ، کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۴۸ از تساوی $\text{Log } x(3x+8) = 2 - \text{Log } x(x-6)$ ، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۴، کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۴۹ اگر $x = {}^8 \text{Log}_4 2\sqrt{2}$ باشد، لگاریتم عدد ${}^4(x+3)$ در پایه x کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۰ نمودارهای دو تابع $f(x) = \text{Log} \frac{1}{x}$ ، $g(x) = \text{Log} \frac{x}{1}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

$g(x)$ بالاتر (۲)

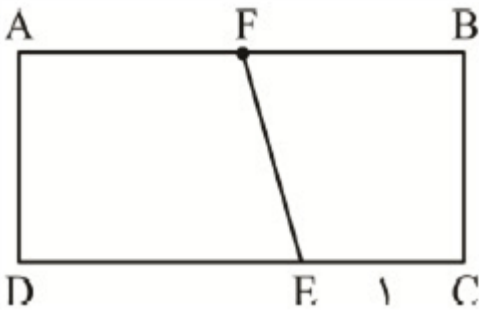
$f(x)$ بالاتر (۱)

فقط در یک نقطه متقاطع (۴)

منطبق‌اند (۳)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۱ نقطه F وسط ضلع AB از مستطیل $ABCD$ است. به مرکز F و شعاع FB دایره‌ای رسم می‌کنیم. اگر این دایره ضلع DC را در نقطه E و یک نقطه دیگر قطع کند و $EC = 1$ و $BC = \sqrt{3}$ باشد، آنگاه اندازه پاره‌خط AE چقدر است؟



$3\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۱)

آزمون‌های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴

۵۲ دایره‌ای محور x ها را در نقاط $A(4, 0)$ و $B(8, 0)$ و محور y ها را در نقطه‌های $C(0, 16)$ و $D(0, \beta)$ قطع می‌کند. دایره‌ای دیگر از نقاط D و C می‌گذرد و بر محور x ها مماس است. طول نقطه تماس کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

$3\sqrt{2}$ (۳)

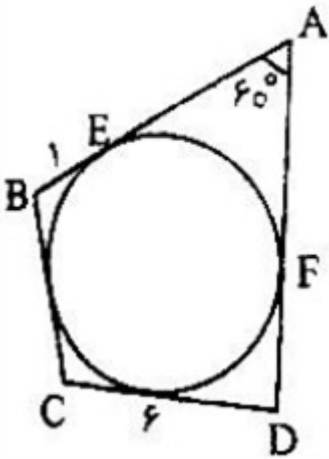
$4\sqrt{2}$ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

آزمون‌های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴



۵۳ در چهارضلعی $ABCD$ ، $\widehat{A} = 60^\circ$ ، $BE = 1$ و $CD = 6$ و شعاع دایره محاطی برابر $\sqrt{3}$ است. مساحت این چهارضلعی کدام گزینه است؟



۴ $16\sqrt{3}$

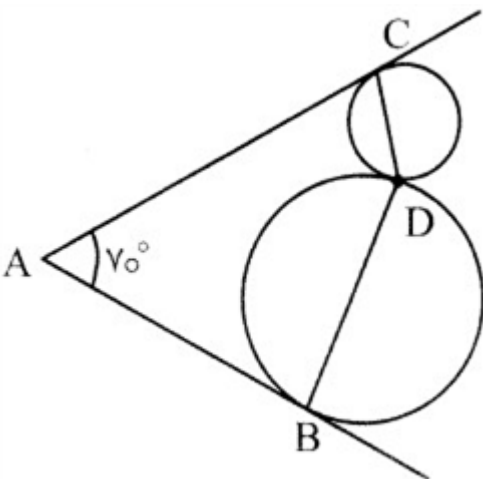
۳ $10\sqrt{3}$

۲ $8\sqrt{3}$

۱ $20\sqrt{3}$

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۵۴ در شکل مقابل، دو دایره در نقطه D مماس بوده و مماس های رسم شده در نقاط B و C یکدیگر را در نقطه A قطع کرده اند. اندازه \widehat{BDC} چند درجه است؟



۴ ۱۴۵

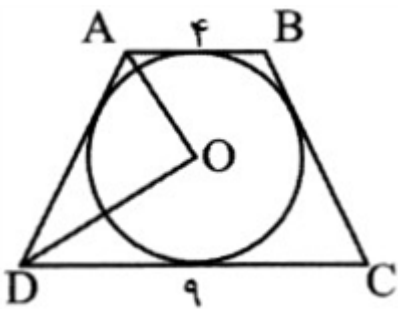
۳ ۱۳۵

۲ ۱۳۰

۱ ۱۲۰

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۵۵ در شکل، دوزنقه متساوی الساقین با قاعده های ۴ و ۹ بر دایره ای به مرکز O محیط شده است. حاصل ضرب $OA \times OD$ کدام است؟



۴ ۱۳

۳ ۲۶

۲ $22/75$

۱ $19/5$

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲



۵۶ چهارضلعی ABCD در یک دایره محاط شده است. رأس‌های این چهارضلعی، رئوس زوایای ظلی واقع بر دایره هستند. مجموع این زاویه‌های ظلی کدام است؟

- ۱۸۰ (۱) ۵۴۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۷۲۰ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۷ در یک دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی با قاعده‌های ۱۶ و ۳۶ واحد، مساحت بین دایره محاطی و دوزنقه کدام است؟ (π را ۳ فرض کنید).

- ۲۰۰ (۱) ۲۰۴ (۲) ۱۹۶ (۳) ۱۹۲ (۴)

آزمون‌های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱

۵۸ اندازه‌ی دو قاعده یک دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی، ریشه‌های معادله‌ی درجه دو $x^2 - 12x + 16 = 0$ است. مساحت این دوزنقه کدام است؟

- ۲۸ (۱) ۲۴ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴)

آزمون‌های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱

۵۹ دو دایره به شعاع ۹ و ۳۶ مماس خارج هستند. یکی از مماس‌های مشترک خارجی آن‌ها، امتداد خط مرکزین را در M و مماس مشترک داخلی را در N قطع می‌کند. طول MN کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۳۸ (۲) ۳۴ (۳) ۳۰ (۴)

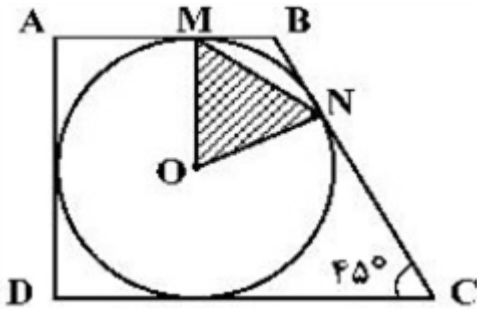
آزمون‌های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱

۶۰ در یک دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی با طول قاعده‌های ۱۰ و ۱۶، اندازه محیط و مساحت دوزنقه را به ترتیب با P و S نمایش می‌دهیم. حاصل $P + \sqrt{10}S$ کدام است؟

- ۵۷۲ (۱) ۴۲۰ (۲) ۵۷۶ (۳) ۴۸۰ (۴)

آزمون‌های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱

۶۱ مطابق شکل زیر، در دوزنقه‌ی ABCD دایره‌ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت مثلث OMN، کدام است؟

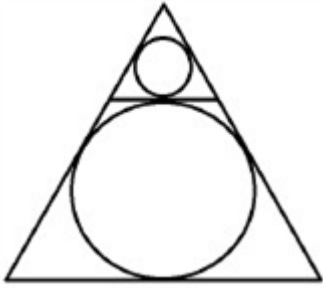


- $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ (۴) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۶۲ در شکل مقابل شعاع دایره کوچک ۵، محیط مثلث بزرگ ۱۲ و مساحت مثلث کوچک ۱۲ می‌باشد، قاعده بزرگ دوزنقه کدام است؟



۳ / ۶ (۴)

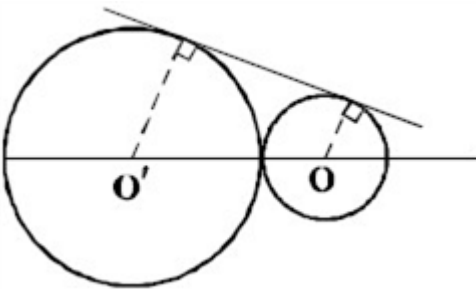
۳ / ۴ (۳)

۳ / ۲ (۲)

۳ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۹۹-۰۰

۶۴ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس برهم‌اند. دایره به قطر OO' با مماس مشترک خارجی در نقطه M مشترک‌اند. فاصله M از نقطه‌ی تماس دو دایره، کدام است؟



۷ / ۵ (۴)

۷ (۳)

۶ / ۵ (۲)

۶ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۵ در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن، دقیقاً کدام چهارضلعی، حاصل می‌شود؟

(۴) نه محاطی و نه محیطی (۳) فقط محیطی (۲) فقط محاطی (۱) محاطی و محیطی

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۵ در مثلث ABC با اضلاع $AB = ۵$ و $AC = ۷$ و $BC = ۸$ واحد، نیم‌ساز داخلی زاویه A ، نیم‌سازهای زاویه‌ی داخلی و خارجی B را در O و O' قطع می‌کند. اندازه‌ی تصویر قائم OO' بر روی BC ، کدام است؟

۲ / ۵ (۴)

۲ (۳)

۱ / ۵ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۶ طول مماس رسم شده از نقطه P بر دایره C برابر ۶ است. اگر نزدیک‌ترین فاصله P از دایره ۴ باشد. آنگاه دورترین فاصله P از دایره کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴

۶۷ مساحت مثلث ABC برابر ۶۴ و محیط آن برابر ۳۲ است. مجموع معکوس سه ارتفاع ABC چقدر است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

۲ (۳)

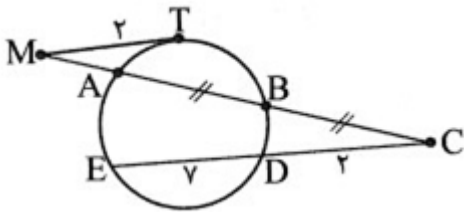
$\frac{1}{2}$ (۲)

۴ (۱)

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۶۸ مطابق شکل زیر $AB = BC$ و MT بر دایره مماس است. طول MA کدام است؟



۱/۲۵ (۴)

۰/۷۵ (۳)

۰/۵ (۲)

۱ (۱)

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۶۹ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الاضلاع بر دایره‌ای به شعاع ۵ واحد محیط است. اگر اندازه‌ی هر یک از ساق‌های این ذوزنقه ۱۵ واحد باشد، مساحت آن چند واحد مربع است؟

۱۵۰ (۴)

۱۲۵ (۳)

۱۰۰ (۲)

۷۵ (۱)

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۷۰ اختلاف مساحت‌های دو دایره متخارج که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{5}$ و طول خط‌المركزین آن‌ها ۸ واحد است، کدام است؟

9π (۴)

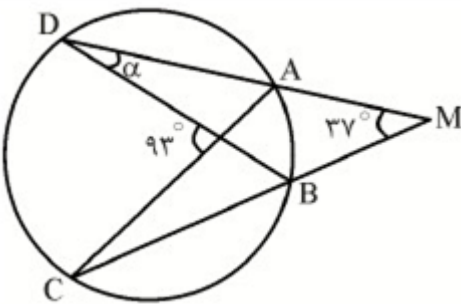
6π (۳)

8π (۲)

7π (۱)

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

۷۱ در شکل مقابل، اندازه زاویه α چند درجه است؟



۳۱ (۴)

۲۹ (۳)

۲۸ (۲)

۲۷ (۱)

آزمون های آزمایشی-دوازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

۷۲ طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر شعاع دایره بزرگتر است. شعاع دایره بزرگتر، چند برابر شعاع دایره کوچکتر است؟

$\frac{16}{3}$ (۴)

۴ (۳)

$\frac{8}{3}$ (۲)

۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۳ دایره $C(O, 4)$ و نقطه M به فاصله ۸ از مرکز دایره C را در نظر بگیرید. اگر از M قاطعی بر دایره رسم کنیم که آن را در نقاط E و F قطع کرده باشد و $EF = MF$ ، در آن صورت اندازه وتر EF کدام است؟

$6\sqrt{3}$ (۴)

$6\sqrt{2}$ (۳)

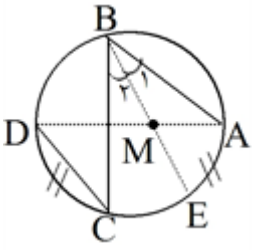
$3\sqrt{6}$ (۲)

$2\sqrt{6}$ (۱)

آزمون های آزمایشی-یازدهم-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰



۷۴ در شکل مقابل $AB = 6$, $BC = 8$, $CD = 3$ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ ، اندازه AM کدام است؟



۲/۷۵ (۴)

۲/۵ (۳)

۲/۲۵ (۲)

۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۷۵ در مثلث ABC ، داریم $\widehat{B} = 50^\circ$ و $\widehat{C} = 60^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمود منصف ضلع BC در نقطه M

مقطعاند. زاویه \widehat{MBC} چند درجه است؟

۴۰ (۴)

۳۵ (۳)

۳۰ (۲)

۲۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



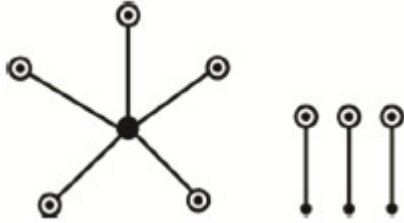
پاسخنامه تشریحی

۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر درجه رأس v_i را با d_i نمایش دهیم، آنگاه:

$$d_1 \times d_2 \times \dots \times d_{12} = 5 = \underbrace{5 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1}_{11 \text{ تا}}$$

تنها گرافی که با این درجات می‌توان رسم کرد به شکل زیر است و تنها مجموعه احاطه‌گر مینیمال غیرمینیم آن مطابق



شکل، ۸ عضو دارد.

۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن که حداقل یال را داشته باشیم، درجه رأس‌ها باید کمترین باشد پس:

$$G: 432 = 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1$$

$$2q = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \Rightarrow q(G) = 9$$

$$P = 8 \Rightarrow q_{k_8} = \binom{8}{2} = 28 \Rightarrow q(\bar{G}) = 19$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta(G) &= 3 \\ \delta(\bar{G}) + \Delta(G) &= P - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta(\bar{G}) = 4 \Rightarrow q(\bar{G}) + \delta(\bar{G}) = 23$$

۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض سؤال این گراف کامل است:

$$P + q = 21 \Rightarrow P = \frac{P(P-1)}{2} = 21 \Rightarrow P^2 + P = 42 \Rightarrow P = 6, q = 15$$

$$\Rightarrow \text{کامل گراف } K_6 \Rightarrow \Delta = \delta = 5 = P - 1$$

$$Pq + \Delta + \delta = (6 \times 15) + 5 + 5 = 100$$

۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر رأس این گراف ۲-منتظم است، بنابراین:

$$\sum \deg V_i = 2q \Rightarrow P \times 2 = 2q \Rightarrow P = q \quad (1)$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2}$$

$$q(G) + 2q(G) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 3q = \frac{P(P-1)}{2} \xrightarrow{\text{طبق (1)}} 3P = \frac{P(P-1)}{2}$$

$$\Rightarrow P - 1 = 6 \Rightarrow P = 7, q = 7 \Rightarrow \Delta = \delta = 2$$

$$\text{گراف } G: P + q + \Delta + \delta = 7 + 7 + 2 + 2 = 22$$

۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۳ می‌باشد. بنابراین مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال

غیرمینیم این گراف، حداقل باید بیشتر از ۳ عضو باشند که عبارتند از:

$$\{a, e, g, h\}, \{a, d, g, h\}, \{b, c, e, g, h\}, \{b, d, g, h\}, \{c, d, g, h\}$$

۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم گراف پترسن دو دسته‌اند:

دسته اول: شامل یک رأس بیرونی مانند a و دو رأس درونی مقابل آن h و i

دسته دوم: شامل یک رأس درونی مانند f و دو رأس بیرونی در دو طرف آن b و e: بنابراین ۱۰ مجموعه احاطه‌گر مینیمم

به صورت زیر وجود دارد:

$$\{a, i, h\} \{b, i, j\} \{c, f, j\} \{d, f, g\} \{e, g, h\} \{f, e, b\}$$

$$\{g, a, c\} \{h, b, d\} \{i, c, e\} \{j, a, d\}$$

۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تعداد اعضای همسایه‌های باز همان درجه رئوس است پس درجه رئوس گراف

$$r.p = 2q \xrightarrow{r=2} 2p = 2q$$

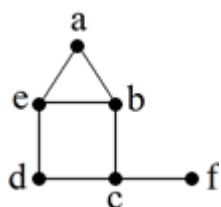
همگی ۲ می‌باشد یعنی ۲- منتظم پس:

می‌دانیم:

$$q(G) + q(\bar{G}) = q_{kp} \xrightarrow[p=q]{q(\bar{G})=2q_G} 4q = \frac{q(q-1)}{2} \Rightarrow q-1 = 8 \Rightarrow q = 9 \Rightarrow p = 9$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید شکل گراف را رسم کنیم:

۸



دور ۵
→ abcdea / abdcea /

۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر تعداد رأس درجه ۴ = ۱ - Δ را x بگیریم، چون مجموع درجات رئوس برابر ۳۸ = ۲q است، داریم:

$$1 \times 2 + 2 \times 5 + x \times 4 + (8 - x) \times 3 = x + 36 = 38 \Rightarrow x = 2$$

۱۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا رئوسی را می‌یابیم که احاطه‌گر باشند و سپس تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر

مینیمال را شمار می‌کنیم:

سه مجموعه {m, p}, {g, e}, {a, d} را در نظر می‌گیریم، از هر مجموعه یک عضو انتخاب کرده به کمک اصل ضرب

$$\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 8$$

جواب یافت می‌شود:



۱۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رأس f را کنار می‌گذاریم. اگر یال ed را اضافه کنیم، گراف کامل مرتبه ۵ ساخته می‌شود.

$$\binom{5}{4} \times \frac{3!}{2} = 15$$

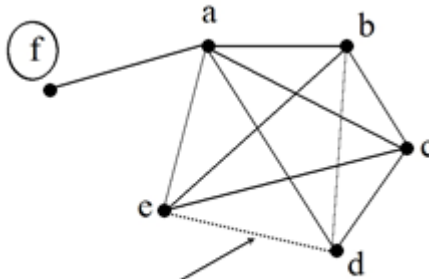
تعداد دورها در گراف کامل مرتبه ۵ به طول ۴ برابر است با:

حال دورهای به طول ۴ که یال ed را دارد حذف می‌کنیم:

$$\frac{e}{\underline{e}} \quad \frac{d}{\underline{d}} \quad \frac{3}{\underline{3}} \quad \frac{2}{\underline{2}} \quad \frac{e}{\underline{e}} = 6$$

رئوس a و b و c
یال ed شامل ed

دور به طول ۴ شامل ed

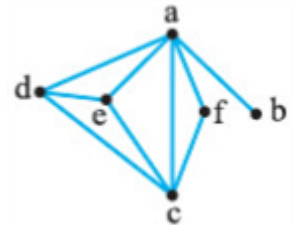


جواب \rightarrow کل - ق - ق = $15 - 6 = 9$

اگر ed باشد گراف کامل است

۱۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شکل ساده شده گراف به صورت روبه‌رو است:



تعداد دورهای به طول ۳ در این گراف ۵ تا است: aeda, aeac, adca, decd, afca

۱۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در گراف ۷- منتظم تمام P رأس از درجه ۷ هستند.

$$\sum_{i=1}^p \text{def} v_i = 2q \rightarrow \begin{cases} P \times 7 = 2 \\ q = 3P + 7 \end{cases} \rightarrow P = 14, q = 49$$

در گراف کامل با $P = 14$ تعداد کل یالها برابر است با:

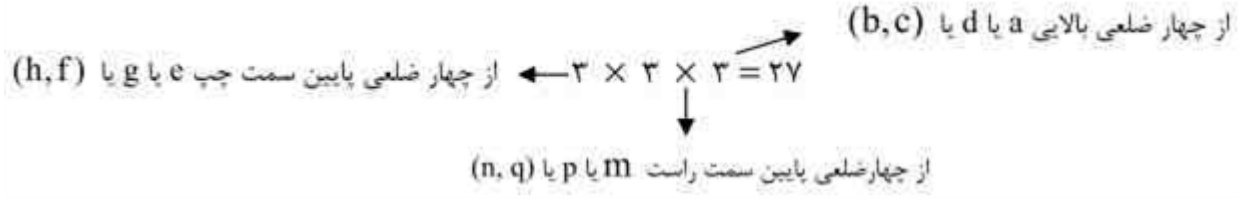
$$\frac{P(P-1)}{2} = \frac{14 \times 13}{2} = 91$$

$$42 = 91 - 49 = \text{تعداد یالهای لازم برای تبدیل به گراف کامل}$$



۱۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عدد احاطه‌گری در این گراف ۳ است و با انتخاب هر یک از رأس‌های درجه ۳ در هر چهارضلعی یعنی یکی از $\{a, d\}$ یکی از $\{m, p\}$ و یکی از $\{e, g\}$ تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر ۳ عضوی مینیمال که مینیمم‌اند یا T - مجموعه‌ها برابر $2 \times 2 \times 2 = 8$ می‌شود اما اگر در هر کدام از مربع‌ها به جای برداشتن یکی از رأس‌های درجه ۳، هر دو رأس درجه ۲ را همزمان انتخاب کنیم مثلاً $\{h, f, q, n, b, c\}$ باز هم یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است، چون همه رأس‌ها پوشش داده شده و هر کدام از رأس‌ها که حذف شود خود آن رأس پوشش داده نمی‌شود. بنابراین برای احاطه شدن تمام رئوس هر چهار ضلعی سه انتخاب داریم: یکی از دو رأس درجه ۳ یا هر دو رأس درجه ۲. پس تعداد کل مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال برابر است با:

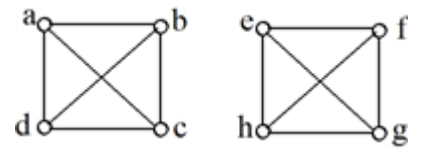


۱۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که مجموع درجات رئوس در این گراف برابر است با: $2q = 2p = 24$ ، پس $p = 8$ و در نتیجه شکل این گراف ناهمبند به صورت مقابل است:

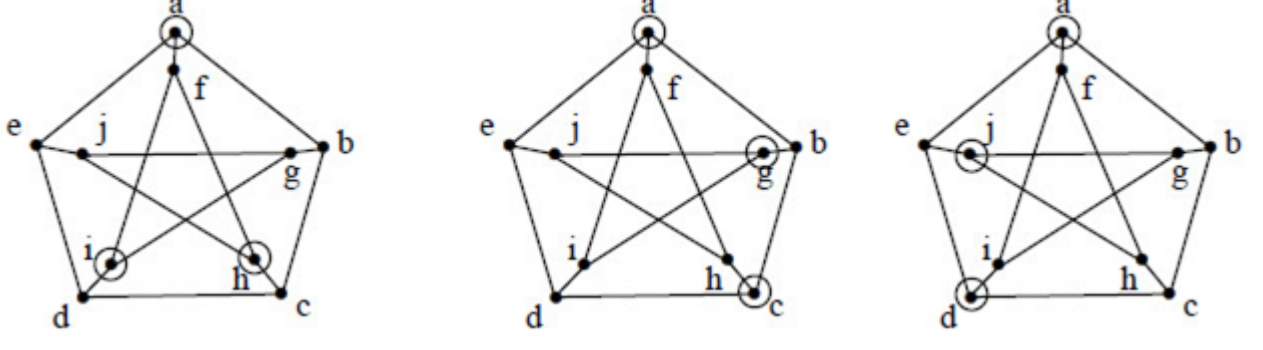
$$تعداد دورها = 2 \times \left[\binom{4}{2} \times \frac{(4-1)!}{2} \right] = 6$$

البته با شمارش تعداد دورهای به طول ۴ هم می‌توانستیم تست را حل کنیم: $acbd$ و $abdca$ و $abcd$ و به همین ترتیب $efghe$ و $efhge$ و $efghe$ ، بنابراین در مجموع ۶ دور به طول ۴ وجود دارد.

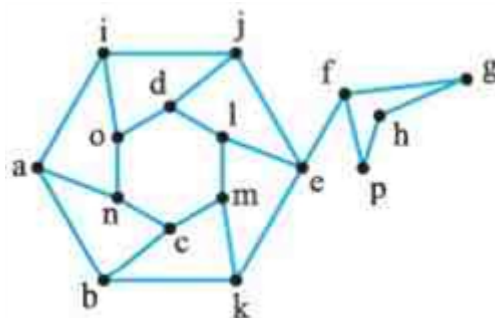


۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم شامل رأس a در شکل‌های زیر نشان داده شده است:



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. رأس‌های گراف را نام‌گذاری می‌کنیم.



حالا گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

گزینه ۱ مجموعه $\{a, b, c, d, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر نیست، چون در آن رأس e احاطه نمی‌شود. در گزینه‌های ۲ و ۴ مجموعه داده شده احاطه‌گر نیستند، زیرا در هیچ‌کدام از آن‌ها رأس p احاطه نمی‌شود. اما مجموعه داده شده در گزینه ۳ یعنی $\{a, c, e, d, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. چون همه رأس‌ها با این ۵ رأس احاطه می‌شوند و با حذف هر کدام از این رأس‌ها، مجموعه باقی‌مانده دیگر احاطه‌گر نیست.

رأس انتخابی	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
رأسی که آن را پوشش می‌دهد	a	a	c	d	e	e	h	h	a	d	e	d	c	a	d	h

هم‌چنین با حذف هر کدام از رأس‌ها، دیگر خود آن رأس احاطه نمی‌شود.

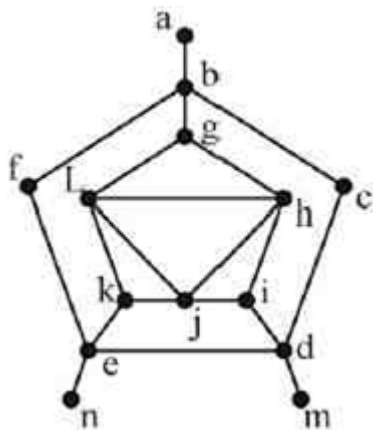
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. سه رأس ۱۴، ۱۵ و ۱۶، تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند، پس مجموعه $\{۱۴, ۱۵, ۱۶\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف بوده و عدد احاطه‌گری گراف برابر ۳ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر هفت نفر را ۷ رأس گراف و دست دادن را معادل رسم یک یال بین دو رأس در نظر بگیریم، تعداد رئوس فرد باید زوج باشد. بنابراین چون ۶ رأس گراف درجه ۲ است رأس هفتم نمی‌تواند درجه ۵ باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. این گراف، گرافی ۲-منتظم از مرتبه ۸ است. عدد احاطه‌گری گراف مکمل گراف ۲-منتظم مرتبه p ، همواره برابر ۲ است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مرتبه گراف G ، $n = ۱۴$ و ماکزیمم درجه $\Delta = ۴$ است. بنابراین:



$$\gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta + 1} = \frac{14}{5} = 3$$

در این گراف با ۳ رأس نمی‌توان مجموعه احاطه‌گری نوشت. از طرفی مجموعه $A = \{b, j, d, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای این گراف است، پس $\gamma(G) = ۴$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\gamma(K_{29}) = ۱ \Rightarrow \text{در گراف کامل } ۲۹ \text{ رأسی}$$

$$\gamma(P_{29}) = \frac{n}{3} = \frac{29}{3} = 10 \Rightarrow \text{در گراف خطی (دارای مسیر } ۲۹ \text{ رأسی)}$$

$$\gamma(C_{29}) = \frac{n}{3} = \frac{29}{3} = 10 \Rightarrow \text{در گراف تک‌حلقه‌ای } ۲\text{-منتظم (دارای دور } ۲۹ \text{ رأسی)}$$

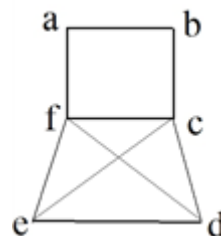
$$\text{مجموع } \gamma \text{ های خواسته شده} = ۱ + ۱۰ + ۱۰ = ۲۱$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

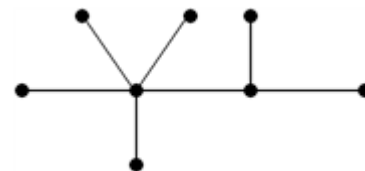
نمودار این گراف به صورت مقابل است که دارای دو دور به طول ۶ است.

$$a - b - c - d - e - f - a$$

$$a - b - c - e - d - f - a$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل این درخت فاقد رأس درجه‌ی ۲ است. منظور از درخت، گراف همبند فاقد دور است.



تذکر: مبحث درخت در گراف در کتاب جدید ریاضیات گسسته موجود نیست.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۵

مطابق شکل کوچکترین اندازه گراف ساده همبندی از مرتبه ۸ که در آن $\Delta = ۴$ باشد برابر ۷ است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۶

$$\left. \begin{aligned} (0.4)^a &= \left(\frac{1}{25}\right)^a = 5^{-2a} \\ 2\sqrt[3]{32} &= 2 \times 2^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{17}{3}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5^{-2a} = 2^{\frac{17}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^b = 25 \Rightarrow 2^{-b} = 5^2 \Rightarrow 5 = \sqrt{2^{-b}} = 2^{\frac{-b}{2}}$$

$$5^{-2a} = \left(2^{\frac{-b}{2}}\right)^{-2a} = 2^{ab} = 2^{\frac{17}{3}} \Rightarrow ab = \frac{17}{3}$$

$$\frac{112}{26} \times ab = \frac{112}{26} \times \frac{17}{3} = 7 \Rightarrow \text{Log}_{49} \frac{7}{2}$$

$$\text{Log}_{\frac{5}{3}} = 1/5 \quad \text{Log}_{\frac{2}{3}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۷

$$\frac{\text{Log}_{\frac{6}{3}}}{\text{Log}_{\frac{15}{3}}} = \frac{\text{Log}_{\frac{3}{3}} + \text{Log}_{\frac{2}{3}}}{\text{Log}_{\frac{3}{3}} + \text{Log}_{\frac{5}{3}}} = \frac{1 + \frac{5}{8}}{1 + 1/5} = \frac{\frac{13}{8}}{\frac{6}{5}} = \frac{13}{20} = 0.65$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به خواص لگاریتم داریم: ۲۸

$$\left(\text{Log}_{\frac{x}{4}}\right)\left(\text{Log}_{\frac{x}{4}}\right) + 3\left(\text{Log}_{\frac{x}{4}}\right) - 4 = 0$$

با فرض $\text{Log}_{\frac{x}{4}} = t$ داریم:

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = -4, 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Log}_{\frac{x}{4}} = -4 \Rightarrow x_1 = 4^{-4} \\ \text{Log}_{\frac{x}{4}} = 1 \Rightarrow x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 \times x_2 = 4^{-4} \times 4 = 4^{-2} = \frac{1}{16}$$

$$\text{Log}(4^x + 1) - \text{Log} 2^{(x-2)} = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۹

$$\text{Log}_{10} \frac{4^x + 1}{2^{x-2}} = 1 \Rightarrow \frac{4^x + 1}{2^{x-2}} = 10$$

$$(2^x)^2 + 1 = \left(2^x \times \frac{1}{4}\right) \times 10 \xrightarrow{2^x=t} t^2 + 1 = \frac{5}{2}t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\begin{cases} t = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow |x_1| + |x_2| = 1 + 1 = 2$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۰

با فرض $\text{Log}_3 x = t$:

$$3 \text{Log}_3 x + \text{Log}_3 x - 4 = 0$$

$$3t + \frac{1}{t} - 4 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = 3 \\ t = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها $p = 3 \sqrt[3]{3}$

$$\log_p^{11} = \log_{\frac{3 \sqrt[3]{3}}{3}}^{11} = \log_{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}^{11} = \frac{\frac{11}{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \log_3^{\frac{1}{3}} = 33$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با شرط $x > 0$ از طرفین معادله، لگاریتم در پایه ۵ می‌گیریم: ۳۱

$$\text{Log}_5(\sqrt{x})^{\text{Log}_5^x - 1} = \text{Log}_5^5 \Rightarrow (\text{Log}_5^x - 1) \times \text{Log}_5 \sqrt{x} = 1$$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
↑

$$\left(\text{Log}_5^x - 1\right) \times \frac{1}{2} \text{Log}_5^x = 1 \Rightarrow \left(\text{Log}_5^x\right)^2 - \left(\text{Log}_5^x\right) - 2 = 0$$

$$\text{Log}_5^x = -1, \text{Log}_5^x = 2$$

$$\downarrow$$

$$x = 5^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$x = 5^2$$

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{5}}$$

$$\boxed{x_2 = 25}$$

$$x_1 x_2 = \frac{1}{5} \times 25 = 5$$

$$t - \frac{2}{t} = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با فرض $\text{Log}_x y = t$: ۳۲

$$t^2 - t - 2 = 0 \begin{cases} t = -1 \Rightarrow \text{Log}_x y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \text{ غ ق} \\ \text{شرط } x > 1 \text{ و } y > 1 \text{ همزمان برقرار نیست} \\ t = 2 \Rightarrow \text{Log}_x y = 2 \Rightarrow y = x^2 = f(x) \text{ با شرط } x > 1 \text{ و } y > 1 \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

$$f(9) + f^{-1}(9) = 81 + 3 = 84$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۳

$$0 = 2^{a(-\frac{1}{3})+b} - 4 \Rightarrow 2^{\frac{-a}{3}+b} = 2^2 \Rightarrow \frac{-a}{3} + b = 2 \Rightarrow -a + 3b = 6$$

$$-2 = 2^{a(0)+b} - 4 \Rightarrow 2 = 2^b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = 2^{-3x+1} - 4 \Rightarrow f\left(-\frac{7}{3}\right) = 2^8 - 4 = 252$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با شرایط مسئله، تعداد ویروس‌ها پس از t ساعت از رابطه‌ی $f(t) = 200 \times 5^{\frac{t}{7}}$ دست می‌آید: ۳۴

$$2000000 = 200 \times 5^{\frac{t}{7}} \Rightarrow 10000 = 5^{\frac{t}{7}} \Rightarrow \text{Log } 5^{\frac{t}{7}} = \text{Log } 10000$$

$$\frac{t}{7} \text{Log } 5 = 4 \Rightarrow t = \frac{12}{\text{Log } 5} = \frac{12}{1 - \text{Log } 2} = \frac{12}{0.7} \approx 17/143 \approx 17 \text{ ساعت}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt[2]{2^{\frac{a}{2}+b}} \Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + b = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = -b \Rightarrow a = -2b \quad (1)$$

$$f^{-1}(8) = 5 \Rightarrow f(5) = 8 \Rightarrow \sqrt[2]{2^{5a+b}} = 2^3 \Rightarrow 2^{5a+b} = 2^6 \Rightarrow 5a + b = 9$$

$$\stackrel{(1)}{\rightarrow} -1 \cdot b + b = 9 \Rightarrow b = -1, a = 2 \Rightarrow a - b = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول نقطه‌ی تلاقی $f(x)$ با محور x ها را می‌یابیم: ۳۶

$$0 = \text{Log} \left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین عرض نقطه‌ی تلاقی $f^{-1}(x)$ با محور y ها برابر ۲ است. حال طول نقطه‌ی B را می‌یابیم:

$$2 = \text{Log} \left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = 9 \Rightarrow x = 18$$

$$S = 18 \times 2 = 36$$

پس طول مستطیل برابر ۱۸ و عرض آن برابر ۲ است و داریم:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۷

$$\text{Log}_{18}^6 = \frac{1 + \text{Log}_2^3}{1 + 2 \text{Log}_2^3} = a \Rightarrow \text{Log}_2^3 = \frac{1-a}{2a-1}$$

$$\text{Log}_{4}^{12} = 1 + \frac{1}{2} \text{Log}_2^3 = \frac{4a-2+1-a}{4a-2} = \frac{3a-1}{4a-2} \Rightarrow \text{Log}_{12}^4 = \frac{4a-2}{3a-1}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۸

$$\text{Log}_{18}^8 = \frac{\text{Log}_3^8}{\text{Log}_3^{18}} = \frac{3 \text{Log}_3^2}{2 \text{Log}_3^3 + \text{Log}_3^2} = \frac{\frac{15}{8}}{2 + \frac{5}{8}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۹

$$3^{x+y} = 3^{2+x-y} \Rightarrow 3^y = 3^{2-x}$$

$$\text{Log}(x + 3^y) - \text{Log } y = \text{Log } 10 \Rightarrow \frac{x + 3^y}{y} = 10 \Rightarrow x + 3^y = 10y$$

$$x + 3^y = 5 \times (3^y) \Rightarrow x + 3 - x = 5(3 - x) \Rightarrow x = \frac{1}{5} = 1/5$$

$$x = 4 \Rightarrow 4^y = 20 \Rightarrow y = 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۰

$$x = 2 \Rightarrow 4^y = 10 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} A \Big|_5^4 &\Rightarrow 5 = A \times 2^{4B} \\ B \Big|_{\frac{5}{2}}^2 &\Rightarrow \frac{5}{2} = A \times 2^{2B} \end{aligned} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{A \times 2^{4B}}{A \times 2^{2B}} \Rightarrow 2^1 = 2^{2B} \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$5 = A \times 2^{4 \times \frac{1}{2}} \Rightarrow A = \frac{5}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} (2)^{\frac{1}{2}x}$$

$$f^{-1}(10) = a \Rightarrow f(a) = 10 \Rightarrow \frac{5}{4} \times 2^{\frac{1}{2}a} = 10 \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}a} = 2^2 \Rightarrow a = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۴۱

$$\left(\frac{\sqrt{4}}{4}\right)^{-2+\text{Log } 9} = \left(\frac{\sqrt{4}}{4}\right)^{-2} \times \left(\frac{\sqrt{4}}{4}\right)^{\text{Log } 9} = \left(\frac{4}{\sqrt{4}}\right)^2 \times 9 \text{Log } \left(\frac{\sqrt{4}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 8 \times 9^{\text{Log } 2^{-\frac{2}{2}}} = 8 \times 9^{\frac{2}{2}} = 8 \times 27 = 216$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-2} = 8^{x-1} \Rightarrow (2^{-2})^{2x-2} = (2^3)^{x-1} \Rightarrow 2^{-4x+4} = 2^{3x-3}$$

$$\Rightarrow -4x + 4 = 3x - 3 - 9x = -6 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$$

$$3^{9x-4} = 3^9 \left(\frac{7}{9}\right)^{-4} = 3^3 = 27$$

$$\text{عبارت مورد نظر سؤال} = 216 + 27 = 243$$

$$-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم: ۴۲

$$\sin \frac{x}{2} = +1 \Rightarrow \text{Min}(g(x)) = 2 = f(a) \text{ شیب}(a)$$

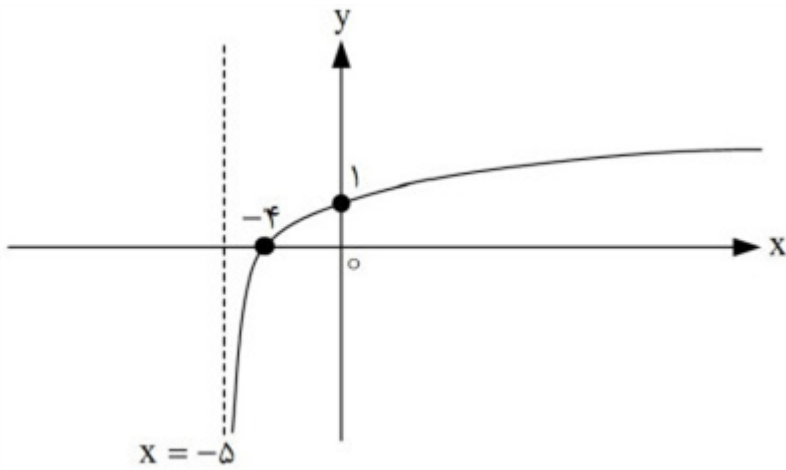
$$\sin \frac{x}{2} = -1 \Rightarrow \text{Max}(g(x)) = 32 = f \text{ از مبدأ}$$

$$f(x) = ax + b \text{ خطی} \Rightarrow f(x) = 2x + 32$$

$$f(3) + g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = (2(3) + 32) + \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\right)} = 38 + 16 = 54$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴۳



$$y = 5^x - 5 \Rightarrow y + 5 = 5^x$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین Log}} \text{Log} \frac{(y + 5)}{5}$$

$$= x + \text{Log} \frac{5}{5} \Rightarrow x = \text{Log} \frac{(y + 5)}{5}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \text{Log} \frac{(x + 5)}{5}$$

* نمودار f^{-1} از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۴۴

$$\text{Log} \frac{x}{3} = t \Rightarrow 3t + \frac{1}{t} - 4 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}, t = 1$$

$$\begin{cases} \text{Log} \frac{x}{3} = 1 \Rightarrow x = 3 \\ \text{Log} \frac{x}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{3} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$\text{Log} \frac{m}{\sqrt{3}} = \text{Log} \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} \text{Log} 3 - \frac{1}{2} \text{Log} 3 = \frac{1}{6} \text{Log} 3 = \frac{1}{6}$$

حال حاصل $\text{Log} \frac{m}{\sqrt{3}}$ را به دست می‌آوریم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۵

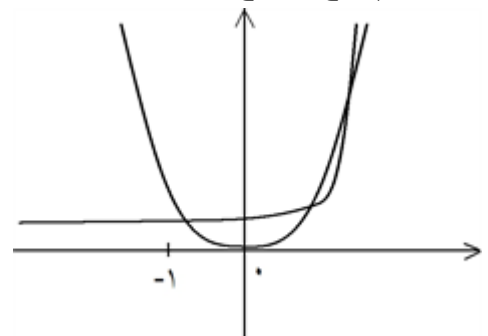
$$4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-x+3} \Rightarrow 2x = -x + 3 \quad x = 1, y = 4$$

مختصات برخورد دو تابع $x = 1, y = 4$

$$d = \frac{|3(1) - 4(4) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$$

فاصله نقطه تا خط

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودارها را رسم می‌کنیم و به روش هندسی بررسی می‌کنیم. ۴۶



با توجه به نمودار در بازه $[-1, 0]$ در یک نقطه متقاطع هستند.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۷

$$3^{x^2-2} = (3^6)^x = 3^{6x} \Rightarrow x^2 - 2 = 6x \Rightarrow x^2 - 6x - 2 = 0 \xrightarrow{+\frac{6}{2}} x^2 - 6x + 9 = 6$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 6 \Rightarrow x-3 = \sqrt{6}$$

$$\text{Log} \frac{(x-3)^2}{6} = \text{Log} \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{2}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۴۸

$$\text{Log}_x (3x+8) + \text{Log}_x (x-6) = 2 \Rightarrow \text{Log}_x (3x+8)(x-6) = 2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 18x + 8x - 48 = x^2 \Rightarrow 2x^2 - 10x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 & \text{ق ق} \\ x=-3 & \text{غ ق} \end{cases}$$

$$\text{Log} \frac{x}{6} = \text{Log} \frac{8}{6} = \text{Log} \frac{2^3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۹

$$x = 8 \text{ Log} \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow x = 8 \text{ Log} \frac{\sqrt{2}}{6} = 8 \text{ Log} \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot 3} = 8 \times \frac{\frac{1}{2}}{2} \Rightarrow x = 6$$

$$\text{Log} \frac{4(x+3)}{x} \xrightarrow{x=6} \text{Log} \frac{36}{6} = \text{Log} \frac{6^2}{6} = 2$$

بنابراین داریم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۰

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \text{Log} \frac{1}{x} = -\text{Log} \frac{x}{1} \\ g(x) &= \text{Log} \frac{x}{1} = -\text{Log} \frac{1}{x} \end{aligned} \right\} f(x) = g(x) \text{ و } x > 0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زاویه $\triangle AEB$ محاطی روبه‌رو به قطر AB است. پس $\triangle AEB = 90^\circ$ در نتیجه در مثلث قائم الزاویه ABE ، ارتفاع EH (وارد بر وتر) واسطه هندسی دو قطعه‌ای است که روی وتر ایجاد می‌کند:

$$EH^2 = BH \times HA \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = 1 \times AH \Rightarrow AH = 3$$

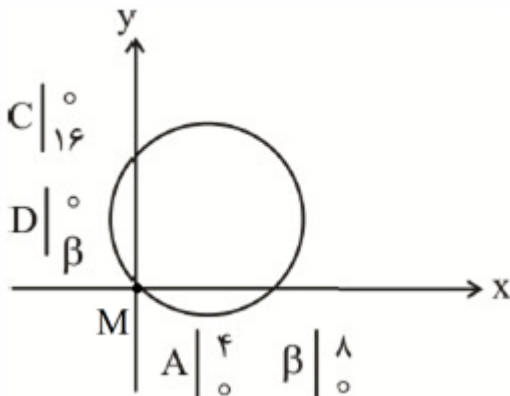
$$AE = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم M مبدأ مختصات باشد آنگاه با استفاده از رابطه طولی در دایره می‌نویسیم.

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

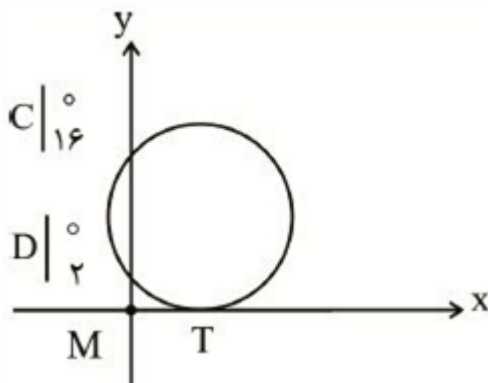
$$\Rightarrow 4 \times 8 = 16 \times \beta \Rightarrow \beta = 2$$



از طرف دیگر برای دایره دوم می‌نویسیم.

$$MT^2 = MD \cdot MC$$

$$MT^2 = 2 \times 16 = 32 \Rightarrow M'T = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از A به مرکز دایره محاطی وصل می‌کنیم. OA نیمساز \hat{A} است و $OE \perp AB$.

$$\triangle OAE: \tan 30^\circ = \frac{OE}{AE} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{AE} \Rightarrow AE = 3$$

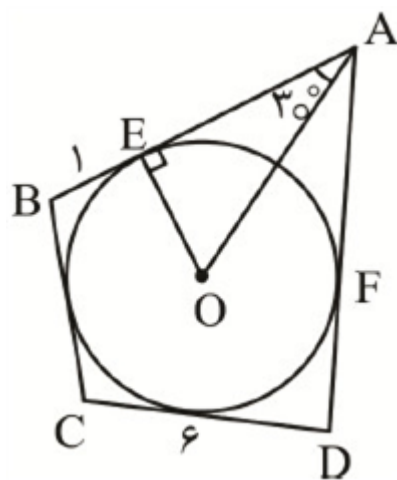
$$P_{ABCD} = AB + AD + BC + CD$$

چهارضلعی ABCD محیطی است. بنابراین $AB + CD = AD + BC$.

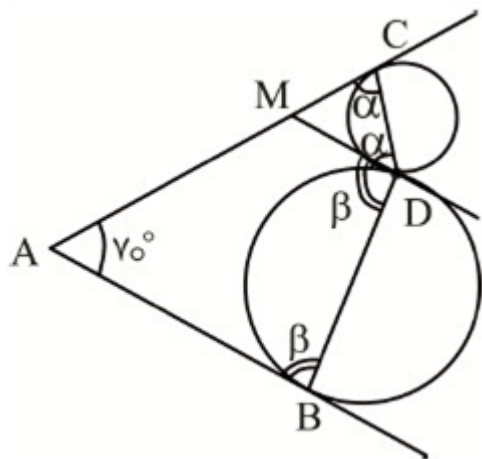
در نتیجه $P_{ABCD} = 2AB + 2CD$ پس:

$$P_{ABCD} = 2(4 + 6) = 20$$

$$S = rP \Rightarrow S = \sqrt{3} \times 10 = 10\sqrt{3}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از نقطه D مماس مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه M قطع کند:



$$\widehat{MDC} = \widehat{MCD} = \alpha = \frac{\widehat{DC}}{2}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{MDB} = \beta = \frac{\widehat{BD}}{2}$$

$$ABDC: 70^\circ + \beta + (\beta + \alpha) + \alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 145^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BDC} = \alpha + \beta = 145^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقطه O مرکز دایره محاطی این ذوزنقه و در نتیجه نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی

$$\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ$$

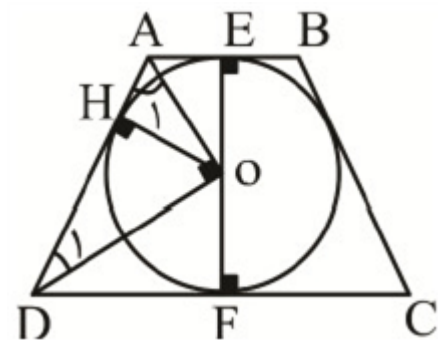
ذوزنقه است. بنابراین:

مثلث OAD در رأس O قائم‌الزاویه است. بنابراین:

$$OA \times OD = OH \times AD$$

$$EF^2 = AB \times CD \Rightarrow EF^2 = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow EF = 6$$

$$\Rightarrow OH = OE = OF = \frac{6}{2} = 3$$

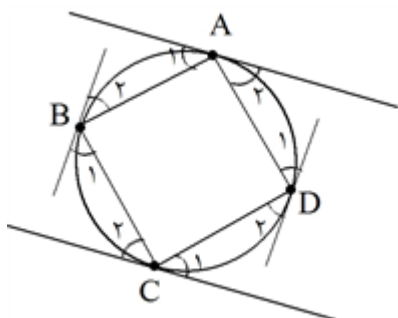


از طرفی دیگر این ذوزنقه، یک چهارضلعی محیطی است. بنابراین:

$$AD + BC = AB + CD \Rightarrow AD + BC = 4 + 9 = 13 \Rightarrow AD = BC = \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow OA \times OD = OH \times AD = 3 \times \frac{13}{2} = 19/2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:



$$\text{زاویه ظلی: } \widehat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}, \widehat{B}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}, \widehat{C}_1 = \frac{\widehat{CD}}{2}, \widehat{D}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2}$$

$$\text{زاویه ظلی: } \widehat{A}_2 = \frac{\widehat{AD}}{2}, \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{BC}}{2}, \widehat{C}_2 = \frac{\widehat{BC}}{2}, \widehat{D}_2 = \frac{\widehat{CD}}{2}$$

بنابراین:

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 + \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2$$

$$= \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} = \widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{BC} + \widehat{CD} = 360^\circ$$



ارتفاع دوزنقه $h = 2R$ (۱)

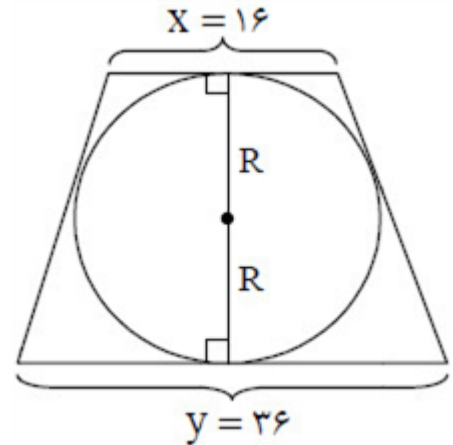
این دوزنقه هم محیطی و هم محاطی است. بنابراین مساحت آن حاصل ضرب میانگین هندسی و حسابی است:

دوزنقه $S = \frac{x+y}{2} \sqrt{xy} = \frac{16+36}{2} \times \sqrt{16 \times 36} = 624$

از طرف دیگر طبق ۱ $S = \frac{(x+y)(\cancel{R})}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow 624 = (16+36)R \Rightarrow R = 12$

$\Delta S = 624 - \pi R^2 = 624 - 3(12)^2 = 192$



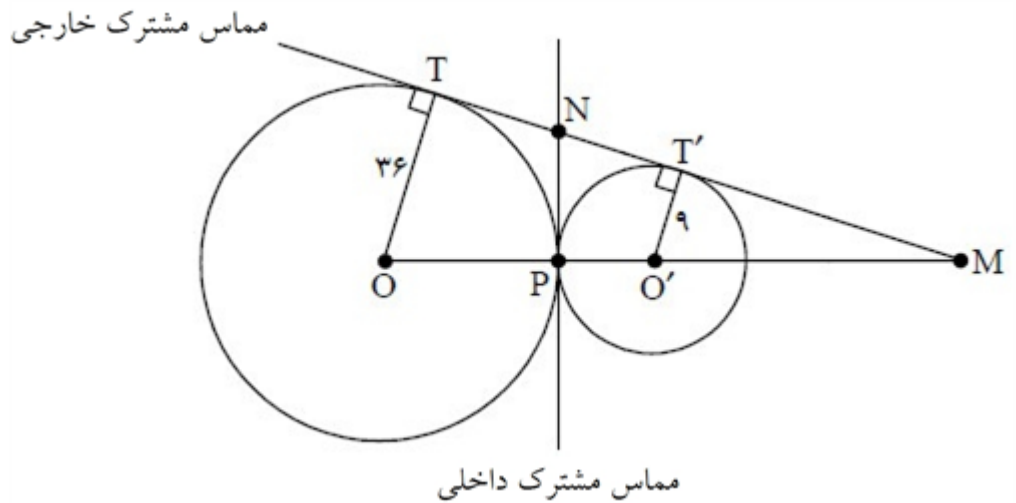
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دوزنقه متساوی الساقین، محاطی است و مطابق فرض سؤال محیطی نیز می‌باشد. اگر اندازه‌ی قاعده‌ها m و n فرض شوند، آنگاه مساحت دوزنقه به صورت زیر به دست می‌آید:

$S_{\text{دوزنقه}} = \sqrt{mn} \times \frac{m+n}{2}$

$x^2 - 12x + 16 = 0 \begin{cases} S = m + n = \frac{-b}{a} = 12 \\ P = mn = \frac{c}{a} = 16 \end{cases}$

$S'_{\text{دایره}} = \sqrt{16} \times \frac{12}{2} = 24$





طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارجی = $TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{9 \times 36} = 36$

می‌دانیم طول دو مماس رسم شده از یک نقطه خارج دایره مانند N برابر است، پس:

$$\left. \begin{array}{l} NT = NP \\ NT' = NP \end{array} \right\} \Rightarrow NT = NT' = \frac{TT'}{2} = 18$$

تالس در $\triangle OTM$ = $\frac{MT'}{MT} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{MT'}{MT' + 36} = \frac{9}{36} \Rightarrow MT' = 12$

$\Rightarrow MN = MT' + NT' = 12 + 18 = 30$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. وقتی دوزنقه متساوی‌الساقین است، الزاماً محاطی است. از طرفی، وقتی دوزنقه هم محیطی است و هم محاطی، آن‌گاه مساحت این دوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده‌ی آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها:

$$\frac{10 + 16}{2} \times \sqrt{10 \times 16} = S_{\triangle} \Rightarrow S_{\triangle} = 52\sqrt{10}$$

در چهارضلعی محیطی مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر می‌باشد. بنابراین

$x + x = 10 + 16 \Rightarrow$ طول ساق دوزنقه $x = 13$

محیط دوزنقه $P = 2(13) + 10 + 16 = 52 \Rightarrow P + \sqrt{10}S = 52 + \sqrt{10}(52\sqrt{10}) = 572$

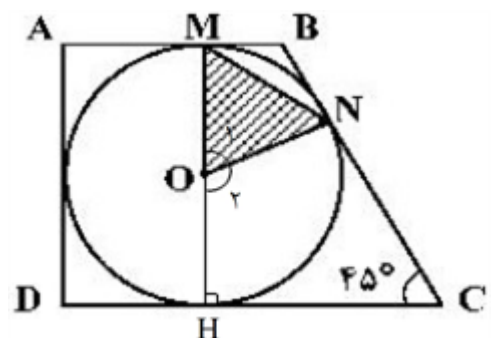
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شعاع OM را امتداد می‌دهیم در این صورت شعاع OH بر DC عمود است. چون

$\widehat{N} = \widehat{H} = 90^\circ$ پس چهارضلعی ONCH محاطی است در نتیجه:

$\widehat{O}_2 = 180^\circ - 45^\circ \xrightarrow{\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = 180^\circ} \widehat{O}_1 = 45^\circ$

بنابراین:

$$S_{OMN} = \frac{1}{2} OM \times ON \sin 45^\circ = \frac{1}{2} (3)(3) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$



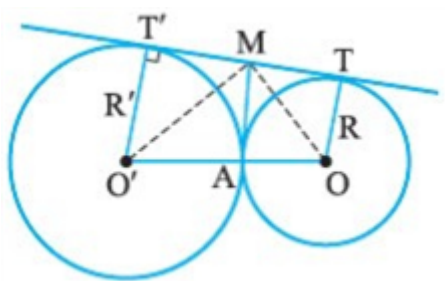
۶۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر P نصف محیط مثلث کوچک باشد $P = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ ، و از آنجایی که مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره، برابر است محیط مثلث بزرگ برابر $2\frac{2}{5} + 2\frac{2}{5} + 2\frac{2}{5} = 6\frac{6}{5} = 12$ می‌باشد و در نتیجه داریم:

$$\text{ساق بزرگ} = 6 - 2\frac{2}{5} = 3\frac{4}{5}$$

۶۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
 $TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{13^2 - (9 - 4)^2} = 12$



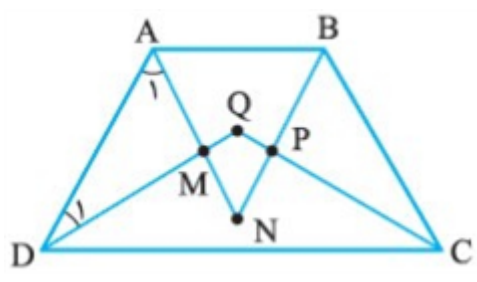
اگر مماس مشترک داخلی دو دایره، مماس مشترک خارجی را در M قطع کند، آن‌گاه $O'M$ نیمساز \widehat{TMA} و OM نیز نیمساز \widehat{TMA} است، پس $\widehat{O'MO} = 90^\circ$ است. اگر دایره‌ای به قطر OO' رسم شود از M همان نقطه مطلوب است.

از طرفی:

$$MA = MT' = MT = \frac{TT'}{2} = 6$$

۶۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{D} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 &= 90^\circ \\ \Rightarrow \widehat{M} &= 90^\circ \end{aligned}$$

به صورت مشابه $\widehat{P} = 90^\circ$ و چون مجموع دو زاویه مقابل در چهارضلعی $MNPQ$ برابر 180° است، پس این چهارضلعی محاطی است.

از طرفی مثلث‌های ABN و DQC متساوی‌الساقین و دو مثلث AMD و BPC هم‌نهشت هستند، پس:

$$MQ = QP \text{ و } MN = NP$$

در نتیجه $MQ + NP = QP + MN$ ، یعنی در چهارضلعی $MNPQ$ مجموع دو ضلع مقابل، برابر با مجموع دو ضلع دیگر است، پس این چهارضلعی محیطی است. در نتیجه چهارضلعی هم محاطی و هم محیطی است.



۶۵

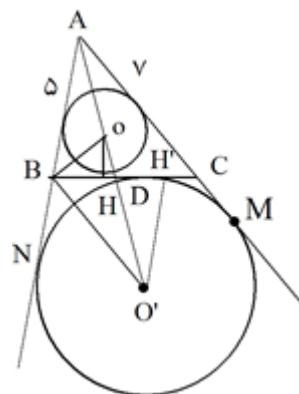
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت به طوری که O مرکز دایره محاطی داخلی و O' مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر ضلع BC است. طول HH' که تصویر قائم OO' روی ضلع BC است را باید به دست آوریم. می‌دانیم که P نصف محیط مثلث ABC برابر ۱۰ است. پس:

$$BH = P - AC = 10 - 7 = 3$$

$$AM = P = 10 \Rightarrow CM = P - AC = 3$$

در ضمن $CM = CH' = 3$ پس $CH' = 3$ بنابراین:

$$HH' = BC - BH - CH' \Rightarrow HH' = 8 - 3 - 3 = 2$$

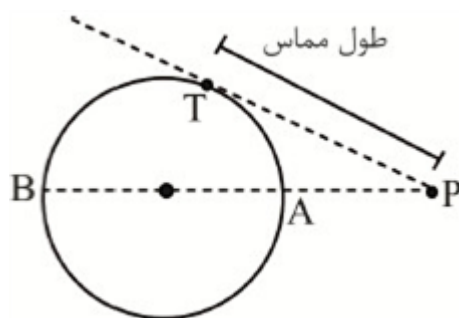


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از P به مرکز دایره یعنی O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند در این صورت A نزدیک‌ترین نقطه دایره تا P و B و دورترین نقطه دایره تا P است. داریم:

۶۶

$$PA \times PB = PT^2 \Rightarrow$$

$$4 \times PB = 6^2 \Rightarrow PB = 9$$



$$S_{\triangle ABC} = 64$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۶۷

$$2P_{\triangle ABC} = 32 \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 16 \Rightarrow \text{شعاع دایره محاطی} = r = \frac{S}{P} = \frac{64}{16} = 4$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} = \frac{1}{4}$$

داریم:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۶۸

$$\text{در دایره} : CD \times CE = CB \times CA \xrightarrow{AB=BC} 2 \times 9 = AB \times 2AB \Rightarrow AB = 3$$

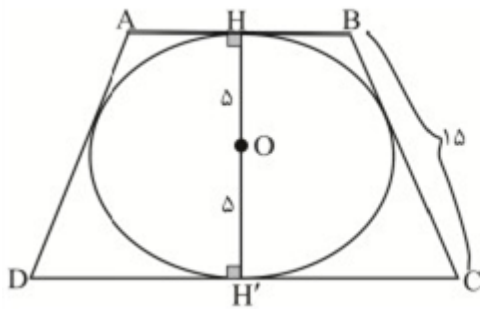
$$MT^2 = MA \times MB \Rightarrow 4 = MA \times (3 + MA)$$

$$\Rightarrow MA^2 + 3MA - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} MA = 1 \\ MA = -4 \text{ غ ق} \end{cases}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD محیطی است. بنابراین:

$$AB + CD = 15 + 15 = 30 \Rightarrow \text{مجموع دو قاعده} = \text{مجموع دو ساق} = \text{مجموع دو قاعده}$$



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}(AB + CD) \times \overline{HH'}$$

$$= \frac{1}{2}(30) \times 2(5) = 150$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$3\sqrt{7} = \sqrt{8^2 - (R - R')^2} \Rightarrow R - R' = 1 \quad (1)$$

$$MM' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$\sqrt{15} = \sqrt{8^2 - (R + R')^2} \Rightarrow R + R' = 7 \quad (2)$$

بنابراین $R = 4$ و $R' = 3$ پس:

$$\text{اختلاف مساحتها} = \pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi - 9\pi = 7\pi$$

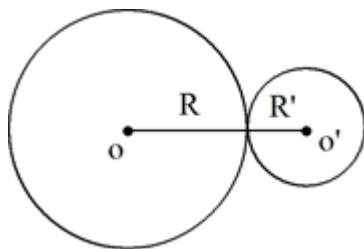
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 93 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \\ 37 = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{CD} + \widehat{AB} = 186 \\ \widehat{CD} - \widehat{AB} = 74 \end{cases}$$

$$2\widehat{CD} = 260 \Rightarrow \widehat{CD} = 130, \widehat{AB} = 56$$

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{56}{2} = 28^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طول خط‌المركزین دو دایره مماس خارج مساوی $R + R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $2\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال داریم.

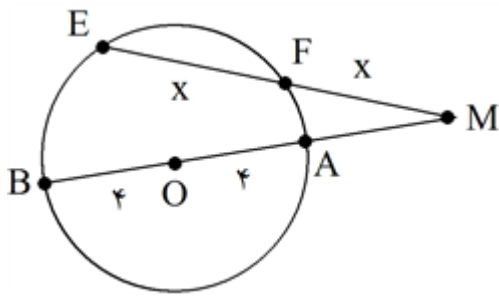


$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \frac{\sqrt{3}}{4}R \Rightarrow 2\sqrt{RR'} = \frac{\sqrt{3}}{4}R$$

$$\Rightarrow 4RR' = \frac{3}{4}R^2 \Rightarrow 4R' = \frac{3}{4}R \Rightarrow R = \frac{16}{3}R'$$

بنابراین شعاع دایره بزرگتر $\frac{16}{3}$ برابر شعاع دایره کوچکتر است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه طولی در دایره داریم: ۷۳



$$MF \times ME = MA \times MB$$

$$x \times 2x = 4 \times 12$$

$$x^2 = 24$$

$$x = 2\sqrt{6} = EF \text{ اندازه وتر}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث MBA و DBC متشابه‌اند. چون: ۷۴

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \widehat{B}_1 = \frac{\widehat{AE}}{2} \\ \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{CD}}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\widehat{AE} = \widehat{CD}} \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \\ \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle DBC \Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AB}{BC} \end{array}$$

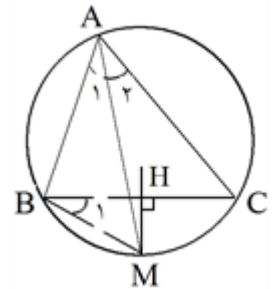
$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{6}{8} \Rightarrow x = 2/25$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دایره‌ی محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی M روی این دایره قرار دارد. ۷۵

$$A_1 = \frac{180 - (B+C)}{2} = 35$$

$$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 = 35$$

محاطی روبروی یک کمان



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴

۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴

