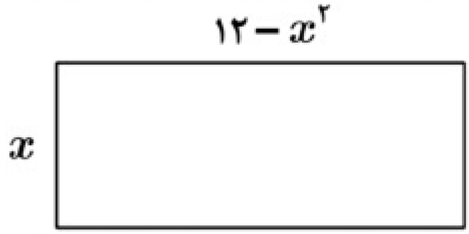
نام و نام خانوادگی :

عنوان آزمون : ۱۲ریاضی-چهارشنبه۶خرداد-تشریحی

۱ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = ۴x^{۳} - ۱۲x + ۲$ را رسم کنید.

۲ مقادیر a و b را در تابع $f(x) = x^{۳} + \mathrm{a}x^{۲} + \mathrm{b}x$ طوری به دست آورید که $x = ۲$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی و $x = ۰$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f باشد.

۳ ماکزیمم مقدار مساحت مستطیل به ابعاد x و $۱۲ - x^{۲}$ را به دست آورید.



۴ اگر در مستطیلی با طول x و عرض y رابطهٔ $۳x + ۵y = ۳۰$ برقرار باشد، آنگاه ابعاد مستطیل را طوری بیابید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن شود. (رسم جدول تغییرات الزامی است)

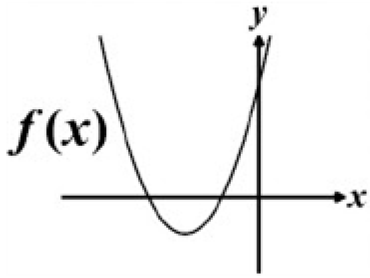
۵ اگر $x = ۱$ طول نقطهٔ عطف و $x = -۲$ طول یکی از نقاط بحرانی تابع $f(x) = \mathrm{a}x^{۳} + \mathrm{b}x^{۲} + ۲۴x$ باشد، آنگاه مقادیر a و b را به دست آورید.

۶ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \dfrac{۲x + ۴}{x - ۱}$ را رسم کنید.

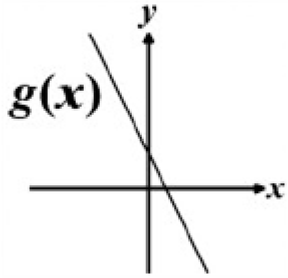
۷ مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = \dfrac{-۲}{۳}x^{۳} - x^{۲} + ۴x + ۱$ را در بازهٔ $[-۳, ۲]$ به دست آورید.

۸ نمودار توابع f و g به صورت زیر است.

الف)

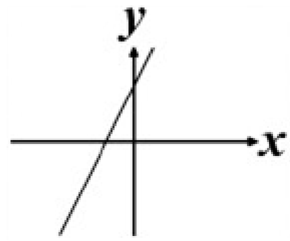


ب)

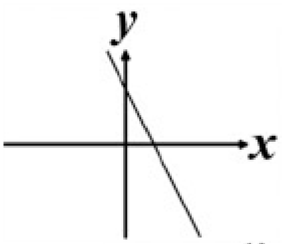


نمودار مشتق هر کدام از توابع f و g را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید. سپس شمارهٔ مربوط به آن را بنویسید. (دو نمودار اضافه است.)

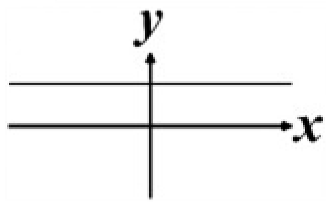
۱)



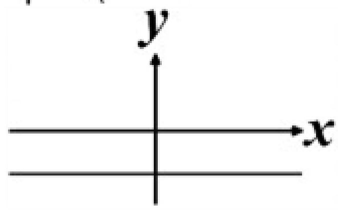
۲)



۳)



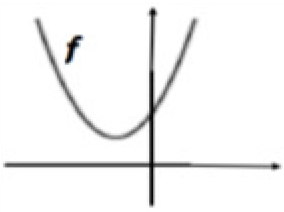
۴)



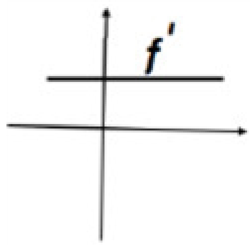
۹ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=(x+1)(x-2)^2$ را رسم کنید.

۱۰ جدول رفتار و نمودار تابع $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$ را رسم کنید.

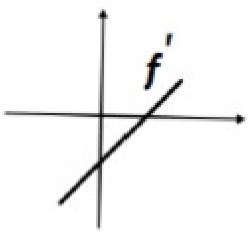
۱۱ با توجه به نمودار تابع f، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



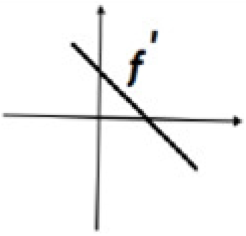
۱)



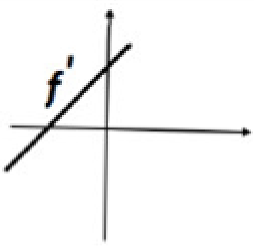
۲)



۳)



۴)



۱۲ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ را رسم کنید.

۱۳ فرض کنید $f(x) = \dfrac{\mathrm{ax}+b}{\mathrm{cx}+d}$، محل تقاطع مجانب‌های آن، نقطه $(۲,۱)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-۱,۰)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

۱۴ ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^۳ + \mathrm{ax} - b$ طوری پیدا کنید که نقطه $(۱,۲)$ اکسترمم نسبی تابع باشد.

۱۵ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \dfrac{x-۲}{x+۲}$ را رسم کنید.

۱۶ جای خالی را با توجه به عبارت‌های داخل پرانتز، کامل کنید.

مشتق تابع $f(x) = \sqrt{۲}$ در $x = ۱$، برابر .... است. (صفر، یک)

۱۷ جدول رفتار و نمودار تابع $y = \dfrac{۲}{۳}x^۳ - x^۲$ را رسم کنید.

۱۸ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

۱۹ اگر نقطه $A(-۱,۱)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = \mathrm{ax}^۳ + \mathrm{bx}^۲ + ۲$ باشد. مقادیر a و b را به دست آورید.

۲۰ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- هر نقطه دلخواه از دامنهٔ تابع ثابت، یک نقطهٔ بحرانی است.

۲۱ جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- اگر برای هر x در بازه I، $f''(x) > ۰$، آنگاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به .... دارد.

۲۲ با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = x^۳ - ۱۲x + ۴$، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید است؟

۲۳ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = -x^۳ + ۶x^۲ - ۹$ را رسم کنید.

۲۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- در هر نقطه‌ای که جهت تقعر منحنی تابع عوض شود آن نقطه‌ی عطف تابع است.

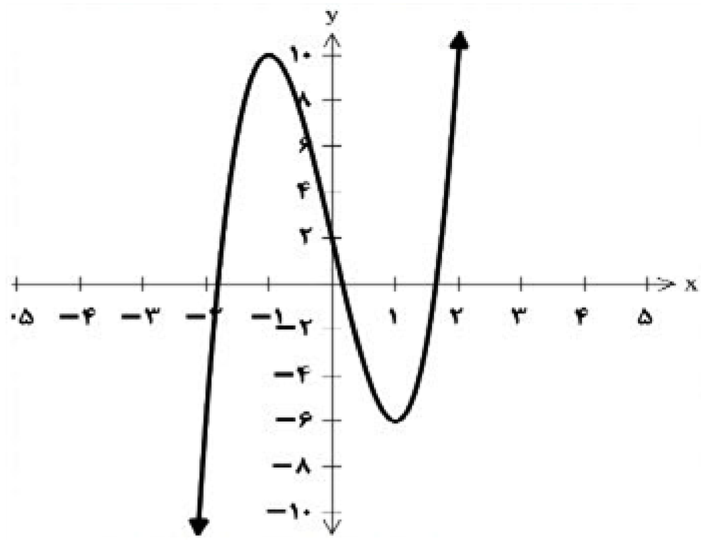
۲۵ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۷$ را در بازه‌ی $[-۱,۳]$، در صورت وجود به دست آورید.

۱

$f'(x)=۱۲x^۲-۱۲=۰ \Rightarrow x=\pm۱$

$f''(x)=۲۴x=۰ \Rightarrow x=۰$

x		-۱		۰		۱	
f'(x)	+	۰	-		-	۰	+
f"(x)	-		-	۰	+		+
f(x)	↗	۱۰	↘	۲	↘	-۶	↗



۲

$f(x)=x^۳+ax^۲+bx \Rightarrow f'(x)=۳x^۲+۲ax+b$

$f''(x)=۶x+۲a \xrightarrow{f''(۰)=۰} a=۰$

$f'(۲)=۰ \Rightarrow ۱۲+b=۰ \Rightarrow b=-۱۲$

۳

$S(x)=x(۱۲-x^۲)=-x^۳+۱۲x$

$S'(x)=-۳x^۲+۱۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ x=+۲ \end{cases} \xrightarrow{x\in[۰,\sqrt{۱۲}]} x=۲ \Rightarrow \begin{cases} S(۰)=S(\sqrt{۱۲})=۰ \\ S(۲)=۱۶=\max \end{cases}$

۴ روش اول:

$۳x+۵y=۳۰ \Rightarrow y=-\frac{۳}{۵}x+۶$

$S=x.y \Rightarrow S(x)=x\left(-\frac{۳}{۵}x+۶\right)=-\frac{۳}{۵}x^۲+۶x \Rightarrow S'(x)=-\frac{۶}{۵}x+۶=۰ \Rightarrow x=۵$

x	۰		۵		۱۰
S'		+	۰	-	
S	۰	↗	۱۵	↘	۰

$\Rightarrow y=۳$

ماکزیمم مطلق

روش دوم:

$۳x+۵y=۳۰ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}y+۱۰$

$S=x.y \Rightarrow S(y)=\left(-\frac{۵}{۳}y+۱۰\right)y=-\frac{۵}{۳}y^۲+۱۰y \Rightarrow S'(y)=-\frac{۱۰}{۳}y+۱۰=۰ \Rightarrow y=۳$

x	۰		۳		۶
S'		+	۰	-	
S	۰	↗	۱۵	↘	۰

$\Rightarrow x=۵$

ماکزیمم مطلق

۵

$$\begin{cases} f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx + ۲۴ \\ f''(x) = ۶ax + ۲b \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(-۲) = ۰ \\ f''(۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = -۱ , b = ۳$$

۶ تعیین محل برخورد با محورها (به صورت جبری، به صورت مختصاتی، در جدول رفتار و یا بر روی نمودار) هر کدام تعلق گیرد. $x = ۰ \Rightarrow f(۰) = -۴ , y = ۰ \Rightarrow x = -۲$

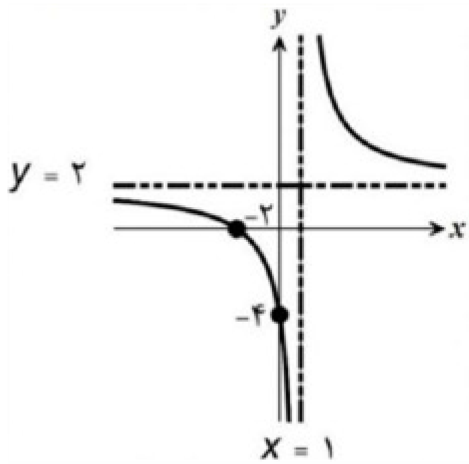
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{۲x+۴}{x-۱} = ۲$ یا $y = \dfrac{a}{c} = ۲$، در نتیجه $y = ۲$ مجانب افقی تابع است.

$\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۲x+۴}{x-۱} = +\infty$ یا $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{۲x+۴}{x-۱} = -\infty$ یا $x = \dfrac{-d}{c} = ۱$، در نتیجه $x = ۱$ مجانب قائم است.

x	$-\infty$ -۲	-۲ ۰	۰ ۱	۱ $+\infty$
f'	-	-	-	-
f''	$\frown$ -	$\frown$ -		$\smile$ +
f	۲ $\searrow$	۰ $\searrow$	۴ $\searrow$ $-\infty$ (-)	$+\infty$ $\searrow$ ۲

محاسبه مشتق اول و تعیین علامت آن در جدول $\qquad f'(x) = \dfrac{-۶}{(x-۱)^۲}$

محاسبه مشتق دوم، تعیین علامت آن و مشخص کردن جهت تقعر در جدول $\qquad f''(x) = \dfrac{۱۲}{(x-۱)^۳}$



۷ $f'(x) = -۲x^۲ - ۲x + ۴ \xrightarrow{f'=۰} x = -۲ , x = ۱$

در نتیجه نقاط $x = ۱$ و $x = -۲$ نقاط بحرانی تابع هستند.

$f(۱) = \dfrac{۱۰}{۳} , f(-۲) = \dfrac{-۱۷}{۳}$

$f(-۳) = -۲ , f(۲) = -\dfrac{۱}{۳}$

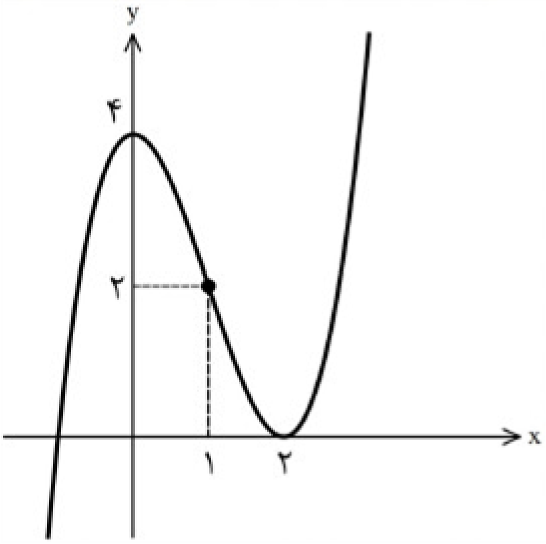
مقدار ماکزیمم مطلق تابع f برابر $y = \dfrac{۱۰}{۳}$ و مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر $y = \dfrac{-۱۷}{۳}$ است.

۸ الف) نمودار شماره ۱ $\qquad$ ب) نمودار شماره ۴

۹

$$f'(x) = (x-۲)^{۲} + ۲(x-۲)(x+۱) \xrightarrow{f'(x)=۰} x = ۰, x = ۲$$

$$f''(x) = ۶x - ۶ \xrightarrow{f''(x)=۰} x = ۱$$



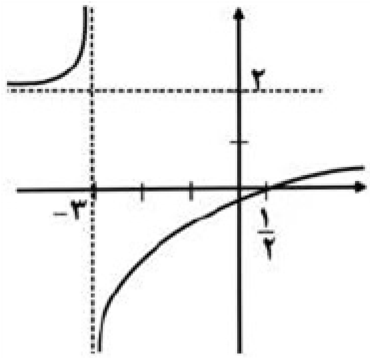
		۰		۱		۲	
f'	+	۰	−		−	۰	+
f''	−		−	۰	+		+
f	↗	۴	↘	۲	↘	۰	↗

۱۰

$y' = \frac{۲(x+۳)-۱(۲x-۱)}{(x+۳)^{۲}} = \frac{۷}{(x+۳)^{۲}} > ۰$ اکیدا صعودی

$x = -۳$ مجانب قائم

$y = ۲$ مجانب افقی



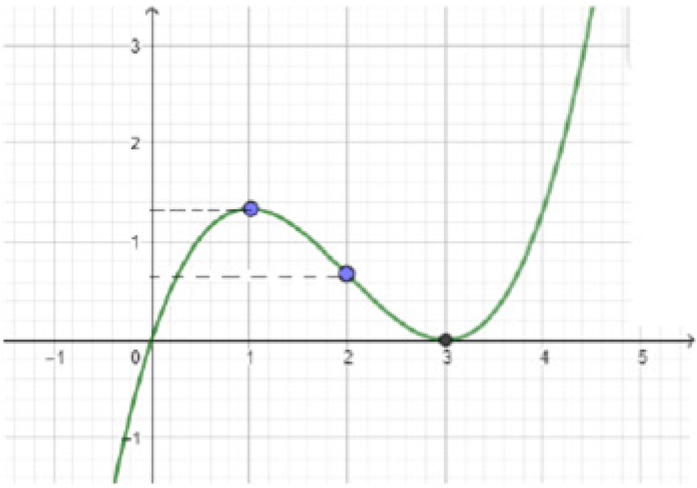
x	$-\infty$		-۳		$+\infty$
y'	+		‖	+	
y	۲ ↗ $+\infty$		‖	$-\infty$ ↗ ۲	

۱۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور xها را در ناحیه $x < ۰$ قطع می‌کند.

x		$x_S < ۰$	
f	نزولی		صعودی
f'	−	۰	+

$f'(x) = x^۲ - ۴x + ۳$ ۱۲

$f''(x) = ۲x - ۴$



x	$-\infty$		۱		۲		۳		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
$f''(x)$		$\frown -$		$\frown -$	۰	$\smile +$		$\smile +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۴}{۳}$	$\searrow$	$\frac{۲}{۳}$	$\searrow$	۰	$\nearrow$	$+\infty$
			Max نسبی		نقطه عطف		Min نسبی		

$cx + d = ۰ \Rightarrow d = -۲c$ ۱۳

$(-۱, ۰) \Rightarrow \dfrac{-a+b}{-c+d} = ۰ \Rightarrow a = b$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax}{cx} = ۱ \Rightarrow a = c$

$f(x) = \dfrac{x+۱}{x-۲}$

$f(۱) = ۲ \Rightarrow a - b = ۱$ ۱۴

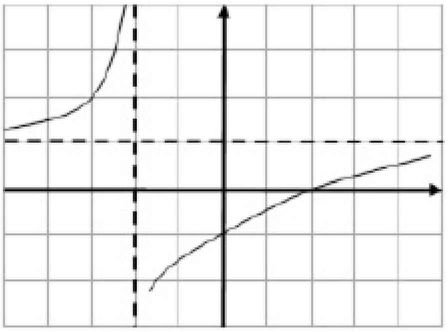
$\begin{cases} f'(x) = ۳x^۲ + a \\ f'(۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۳ + a = ۰ \Rightarrow a = -۳, b = -۴$

۱۵

مجانب قائم $x=-۲$

مجانب افقی $y=۱$

$y'=\frac{۴}{(x+۲)^{۲}}>۰$



x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
f'		+	‖	+	
f	۱	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↗	۱

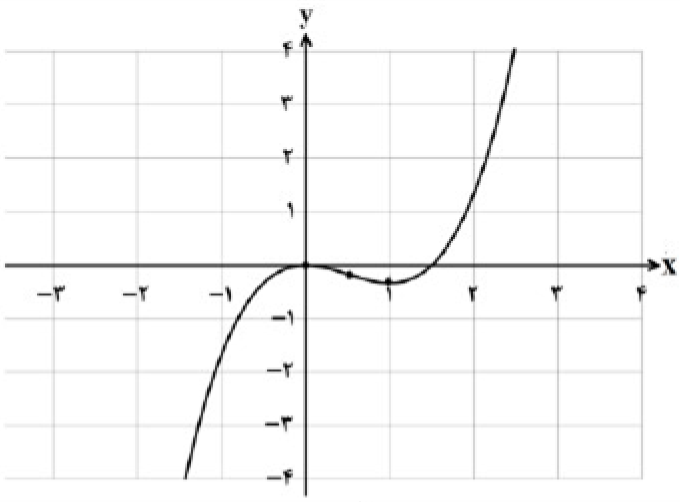
۱۶ صفر

۱۷

$D_f=R$

$f'(x)=۲x^{۲}-۲x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۱\end{cases}$

$f''(x)=۴x-۲=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$



x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۲}$		۱		$+\infty$
f'		+	۰	−		−	۰	+	
f''		−		−	۰	+		+	
f		↗		↘		↘		↗	
		∩	۰	∩	$-\frac{۱}{۶}$	∪	$-\frac{۱}{۳}$	∪	
			max				min		

۱۸

$x - y = ۱۰$

$p = xy = x(x - ۱۰) = x^۲ - ۱۰x$

$p'(x) = ۲x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow x = ۵, y = -۵$

۱۹

$$\begin{cases} f(-۱) = -a + b + ۲ = ۱ \Rightarrow -a + b = -۱ \\ f''(-۱) = ۰ \Rightarrow -۶a + ۲b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-۱}{۲}, b = \frac{-۳}{۲}$$

۲۰ درست

۲۱ بالا

۲۲

$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} x = ۲, x = -۲$

اکیداً صعودی $(۲, +\infty), (-\infty, -۲)$

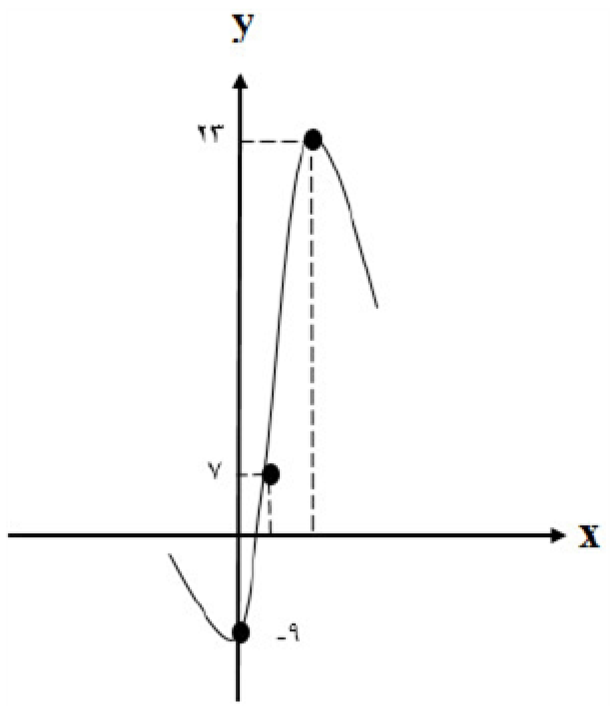
x		-۲		۲	
f'	+		-		+
f	↗		↘		↗

۲۳

$f(x) = -x^۳ + ۶x^۲ - ۹, D_f = R$

$f'(x) = -۳x^۲ + ۱۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \end{cases}$

$f''(x) = -۶x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$



x	-∞		۰		۲		۴		+∞
f'		-		+		+		-	
f''		+		+		-		-	
f	+∞	↘		↗		↗		↘	-∞
		∪	-۹ min	∪	۷	∩	۲۳ max	∩	

۲۴ نادرست

۲۵

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۱ \end{cases}$$

$$f(-۱) = ۹$$

$$f(۱) = ۵ \quad \Rightarrow \max(۳, ۲۵), \min(۱, ۵)$$

$$f(۳) = ۲۵$$