



نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

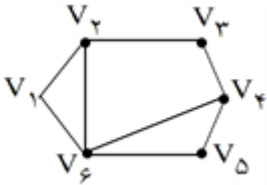
زمان آزمون :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۵/۰۳/۰۳

عنوان آزمون : ۱۲ ریاضی - یکشنبه ۳ خرداد - تشریحی



نمودار زیر مربوط به گراف $G(V, E)$ است. به ۳ سؤال بعدی پاسخ دهید.



۱ مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌های گراف را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

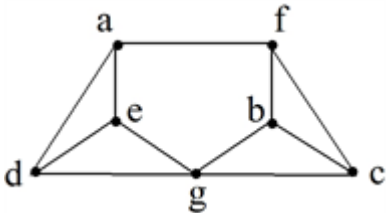
۲ دو دور به طول ۵ در این گراف بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

۳ «دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های» این گراف را به صورت یک دنباله نزولی بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

گراف G به صورت مقابل رسم شده است، با توجه به آن به ۳ سؤال بعدی پاسخ دهید.



۴ دو مسیر از a به b بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

۵ آیا این گراف همیلتنی است؟ چرا؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

۶ می‌خواهیم رئوس G را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند. کم‌ترین تعداد رنگ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی



گراف $G(V, E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_5, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$ را در نظر بگیرید و به ۲ سؤال بعدی پاسخ دهید.

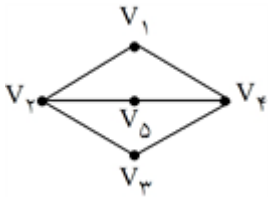
۷ نمودار این گراف را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

۸ مسیر از v_1 به v_3 بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

شکل زیر نمودار گراف G می‌باشد:



۹ آیا G یک گراف بازه‌ها است؟ چرا؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

۱۰ طولانی‌ترین مسیر از v_1 به v_3 را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

۱۱ کلیه دورهای به طول ۴ در این گراف را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

۱۲ یک گراف همبند ۷ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۱۳ به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

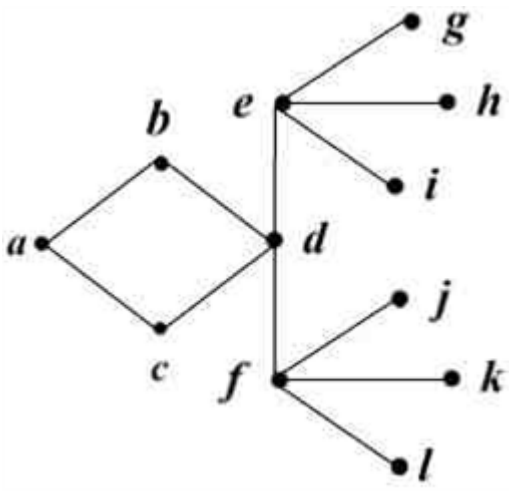
۱۴ در گراف ۵- منتظم از مرتبه p و اندازه‌ی q رابطه $2q - 3p = 12$ برقرار می‌باشد، مقادیر p و q را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی



۱۵

گراف زیر را در نظر بگیرید:
الف) عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.
ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.
ج) یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال ۴ عضوی بنویسید.

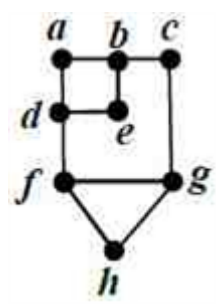


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۱۶

یک گراف ۴ رأسی غیرتهی k - منتظم رسم کنید که:
الف) k بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.
ب) k کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

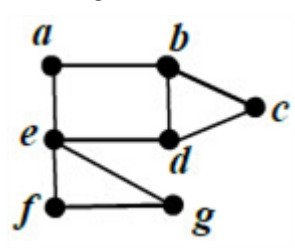
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳



۱۷

در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰



۱۸

عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۱۹

گراف ساده را تعریف کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

۲۰

گراف k - منتظم را تعریف کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۲۱

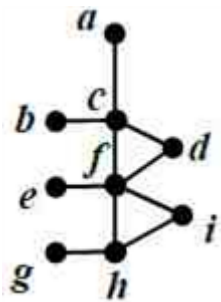
جای خالی را با عدد مناسب تکمیل کنید.
عدد احاطه‌گری گراف C_7 برابر است با

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳



۲۲) گراف C_7 را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

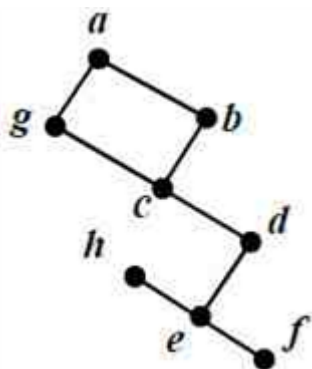


۲۳) گراف شکل مقابل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) یک γ - مجموعه مشخص کنید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱



۲۴) عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۲۵) مجموعه احاطه‌گر مینیمال را تعریف کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۲۶) یک توده باکتری بعد از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{4t+1} + \frac{t^2}{4}$ گرم است.

الف) آهنگ تغییر متوسط تابع m در بازه زمانی $[0, 2]$ را به دست آورید.

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 2$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۴

۲۷) مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (2x^6 + \sqrt{2x})^7$ ب) $g(x) = \frac{2x^3 - 1}{-x^2 + 2x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۲۸) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^3 - 6x + 1}$ ب) $g(x) = 2 \tan x + \text{Cos}^5(2x^3)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳



۲۹ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$f(x) = (x^3 + 1)^2 (\sqrt{3x + 2}) \quad \text{الف)}$$
$$g(x) = \sin^3 x + \tan(x^2) \quad \text{ب)}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۳۰ با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = 2$ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x + 2 & x \geq 2 \\ 4\sqrt{x+2} - 3x & x < 2 \end{cases}$$

۳۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x = 2$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم تجربی

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq \frac{\pi}{4} \\ ax - b & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

۳۲ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)$ مفروض است. ضرایب a و b را چنان بیابید که این تابع در $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق‌پذیر باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم ریاضی

۳۳ تابع $f(x) = x^2 - x + 1$ را در نظر بگیرید:
الف) آهنگ متوسط تغییر تابع f را وقتی متغیر از $x_1 = 1$ به $x_2 = 5$ تغییر کند، به دست آورید.
ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطه $x = 3$ تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم تجربی

$$y = \sqrt{(x+2)^2}$$

۳۴ مشتق تابع زیر را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم تجربی

$$y = 2 \sin^2 \sqrt{x}$$

۳۵ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن لازم نیست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم تجربی

۳۶ متحرکی که بر محور x ها در حرکت است دارای معادله‌ی حرکت $x = 3t^2 - 4t + 1$ می‌باشد. t بر حسب ثانیه و x بر حسب سانتی‌متر)
الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = 1$ تا $t = 3$ به دست آورید.
ب) سرعت لحظه‌ای آن را در زمان $t = 2$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم تجربی

۳۷ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را در نقطه‌ی $x = 1$ بدست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم تجربی

$$h(x) = \left(\frac{2}{x} + \sqrt{x} \right)^3$$

۳۸ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم تجربی

۳۹ مشتق‌پذیری تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = |x^2 - 3x|$ را در $x = 3$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم ریاضی



۴۰ مشتق توابع زیر را حساب کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$ ب) $y = \sin x + \sqrt[3]{\cos x}$

ج) $y = 5x(x^2 - x + 1)^3$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم ریاضی

۴۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 4x(1 - |x|)$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۴۲ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. مطلوب است:
الف) سرعت متوسط در بازه $[1, 2]$ ب) سرعت لحظه‌ای در زمان $t = 3$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۴۳ به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۴۴ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

ب) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$

پ) $h(x) = \sin^3 x + \cos^2 x$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۴۵ معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع وارون $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ را در نقطه‌ی $(0, -3)$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

۴۶ با استفاده از تعریف مشتق، وجود مشتق‌های راست و چپ و مشتق‌پذیر بودن تابع $f(x) = |x - 3|$ را در نقطه‌ی $x = 3$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم ریاضی

۴۷ نقطه‌ای از نمودار تابع $y = x^2 + 3x$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی تابع، در این نقطه موازی نیم‌ساز ربع اول و سوم باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم ریاضی

۴۸ اگر $g(x) = x^2 + 2$ و $f(x) = \sqrt{5x + 1}$ و $F = f \circ g$ باشد، $F'(x)$ را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-چهارم دبیرستان-چهارم ریاضی

۴۹ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$h(x) = \frac{-5x}{x+1}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم تجربی



شیب خط مماس بر منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ را در نقطه‌ای به طول ۵ واقع بر آن، بدست آورید. ۵۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم تجربی



پاسخنامه تشریحی

$$V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$$

$$E = \{V_1V_2, V_1V_4, V_2V_3, V_2V_4, V_3V_4, V_4V_5, V_4V_6, V_5V_6\}$$

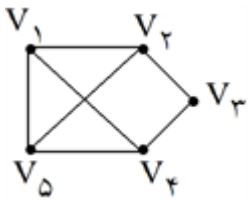
$$V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_1, V_2V_3V_4V_5V_6V_2$$

$$4, 3, 3, 2, 2, 2$$

afcb : دو مسیر از a به b
afb

بله چون دارای دور همیتونی egbcfa است.

کمترین تعداد رنگ = 4، مثلاً رئوس f, g قرمز و رئوس c, d آبی و رئوس b, e سبز و رأس a زرد.



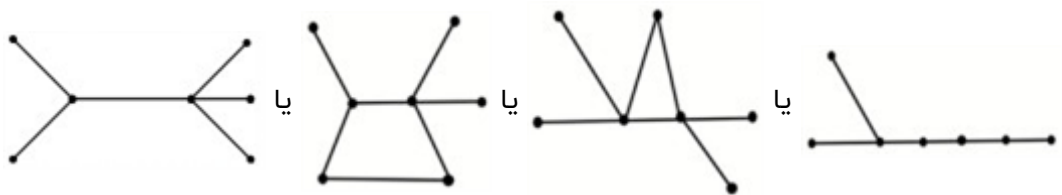
$$V_1V_2V_3, V_1V_4V_3, V_1V_5V_4V_3$$

خیر زیرا لازم است رئوس V_1, V_2, V_3, V_4 در چهارضلعی یا در مجاور باشند یا V_4, V_2 یا V_5, V_1 هیچکدام از قطرهای موجود نیست یعنی گراف حفره دارد پس گراف بازهها نیست.

$$V_1, V_2, V_5, V_4, V_3$$

$$V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 \text{ و } V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 \text{ و } V_1, V_2, V_5, V_4, V_3$$

مسئله چندین جواب دارد که چند مورد از آنها رسم شده است.



$$\binom{8}{4} \times 4! = \frac{8!}{4!}$$

انتخاب 4 نفر
جایگشت 4 کلاه

$$pr = 2q \Rightarrow 5p = 2q, 2q - 2p = 12 \Rightarrow 5p - 2p = 12 \Rightarrow p = 4, q = 15$$

الف) $\gamma(G) \geq \frac{p}{\Delta + 1} \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$ (*) (ص ۴۹)

۱۵

از طرفی $A = \{a, e, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است بنابه رابطه (*): پس $\gamma(G) = 3$

ب) $B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$

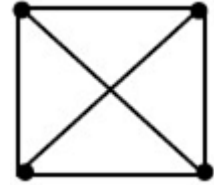
به هر مجموعه احاطه‌گر هشت عضوی مینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۶)

ج) $C = \{a, e, f, b\}$

به هر مجموعه احاطه‌گر چهار عضوی غیرمینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۷)



(ب)



(الف)

۱۶

$D = \{a, e, c, h\}$ (ص ۴۶)

۱۷

طبق قضیه داریم $2 \leq \gamma(G) = \frac{7}{4+1}$. از طرفی مجموعه $D = \{b, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \geq 2$.

۱۸

بنابراین $\gamma(G) = 2$. (ص ۵۰)

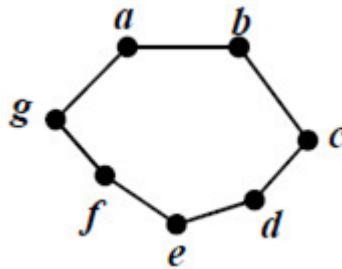
۱۹ گراف ساده‌ی G زوج مرتبی چون (V, E) است که در آن V مجموعه ای متناهی و ناتهی است و E مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های دو عضوی V است.

۱۹

۲۰ گرافی که درجه تمام رئوس آن یا هم مساوی و برابر یا عدد k باشد. (ص ۳۵)

۲۰

۲۱ ۳ یا $\frac{7}{3}$



۲۲ رسم گراف (ص ۳۸)

۲۲

مسیر: a b c d e f

الف) $D = \{h, c, e\}$

ب) $D = \{g, c, i, e\}$

۲۳

(در صورت ارائه مجموعه‌های مشابه با این ویژگی‌ها نمره داده شود). (ص ۵۴)



۲۴ برای احاطه کردن رئوس a, b, c, d, g حداقل دو تا از آنها باید در مجموع احاطه‌گر باشند، زیرا $\frac{5}{3+1} = 2$.

برای احاطه کردن رئوس e, f, h حداقل یکی از آنها باید انتخاب شوند، زیرا، $\frac{3}{3+1} = 1$. بنابراین حداقل سه رأس باید در هر مجموعه احاطه‌گری از گراف باشد یعنی $\gamma(G) \geq 3$. از طرفی مجموعه $D = \{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq 3$. بنابراین $\gamma(G) = 3$. (ص ۵۰)

۲۵ یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نباشد را احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم. (ص ۴۶)

الف) $\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{m(2) - m(0)}{2 - 0} = \frac{7 - 1}{2} = 3$

ب) $m'(t) = \frac{4}{2\sqrt{4t+1}} + \frac{3t^2}{2} \Rightarrow m'(2) = \frac{2}{3} + 6 = \frac{20}{3}$

الف) $f'(x) = 7(2x^6 + \sqrt{2x})^6 \left(12x^5 + \frac{2}{2\sqrt{2x}} \right)$

ب) $g'(x) = \frac{6x^5(-x^2 + 2x) - (-2x + 2)(2x^3 - 1)}{(-x^2 + 2x)^2}$

الف) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x^3 - 6x + 1) - (3x^2 - 6)\sqrt{x+1}}{(x^3 - 6x + 1)^2}$

ب) $g'(x) = 2(1 + \tan^2 x) + (5)(6x^5)(-\sin(2x^3)) \cos^6(2x^3)$

الف) $f'(x) = 2 \times 3x^2(x^2 + 1)(\sqrt{3x+2}) + \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^2 + 1)^2$

ب) $g'(x) = 2 \times 3 \times \cos 3x \sin 3x + 2x(1 + \tan^2(x^2))$

(اگر دانش‌آموزی به صورت $\sin^6 x$ بنویسید، نمره بارم این قسمت تعلق گیرد.)

$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = -4$ ۳۰

$\left. \begin{array}{l} f(2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \rightarrow 2 \text{ در پیوسته است.}$ ۳۱

$f'(x) = \begin{cases} -6x + 6 & x > 2 & f'_+(2) = -6 \\ \frac{2}{\sqrt{x+2}} - 3 & x > 2 & f'_-(2) = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{در } x = 2 \text{ مشتق ندارد.}$



اولاً باید f در $x_0 = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد. ۲۲

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} a - b = 0$$

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع f در $x = \frac{\pi}{2}$ باید مساوی باشند.

$$\begin{cases} f' - \left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\ f' + \left(\frac{\pi}{2}\right) = a \end{cases} \Rightarrow -1 = a \Rightarrow b = -\frac{\pi}{2}$$

الف) ۲۳

$$f(1) = (1)^2 - 1 + 1 = 1, f(5) = (5)^2 - 5 + 1 = 21 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{21 - 1}{4} = 5$$

$$f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(3) = 2 \times 3 - 1 = 5 \quad \text{ب)}$$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt{x+2}}$$

۳۴

$$y = 2 \sin^2 \sqrt{x} \Rightarrow y' = 2 \times \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \sin \sqrt{x} = \frac{2 \cos \sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

۳۵

$$x = 3t^2 - 4t + 1$$

۳۶

الف: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(3) - x(1)}{3 - 1} = \frac{(27 - 12 + 1) - (3 - 4 + 1)}{2} = \frac{16 - 0}{2} = 8$

ب: $x'(t) = 6t - 4 \xrightarrow{t=2} x'(2) = 12 - 4 = 8$

تذکر: وقتی معادله حرکت درجه ۲ باشد، تساوی الف و ب صورت می‌پذیرد.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - x^2 + 2x}{\Delta x} =$$

۳۷

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2x - 2\Delta x - x^2 + 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 2)}{\Delta x} = 2x - 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(1) = 0$$

۳ راه: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$

$$h'(x) = 3 \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{2}{x} + \sqrt{x} \right)$$

۳۸



$$f(x) = |x^3 - 3x| \quad x_0 = 3$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^3 - 3x| - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x(x - 3)|}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x| \cdot |x - 3|}{x - 3}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x| \cdot |x - 3|}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x| \times (x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} |x| = |3| = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x| \cdot |x - 3|}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x| \times (-(x - 3))}{x - 3} = -\lim_{x \rightarrow 3^-} |x| = -|3| = -3 \end{cases}$$

لذا f در نقطه‌ی $x_0 = 3$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

$$\text{الف) } y' = \frac{\frac{3}{\sqrt[3]{3x}}(x^3 + 1) - 3x\sqrt[3]{3x}}{(x^3 + 1)^3}$$

$$\text{ب) } y' = 3 \sin^3 x \cos x + \frac{-\sin x}{5\sqrt[5]{\cos^5 x}}$$

$$\text{ج) } y' = 5(x^3 - x + 1)^4 + 3(x^3 - x + 1)^3(3x - 1)5x$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 4x^3 & x \geq 0 \\ 4x + 4x^3 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{4x - 4x^3}{x} = 4$$

$$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{4x + 4x^3}{x} = 4 \Rightarrow f'_+(\cdot) = f'_-(\cdot) \text{ تابع مشتق‌پذیر است}$$

$$\text{الف) } \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25 \text{ سرعت متوسط}$$

$$\text{ب) } h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow h'(3) = 10 \text{ سرعت لحظه‌ای}$$

تابع در $x = -2$ پیوسته است. ۴۳

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^3 - 4| - 0}{x + 2} = 4$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^3 - 4| - 0}{x + 2} = -4 \Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$$

$f'(-2)$ موجود نیست.

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{(3x - 2)(-3x + 2) - (-3)(x^3 - 3x + 1)}{(-3x + 2)^3}$$

$$\text{ب) } g'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x}}(3x^3 + 5) + \sqrt{x}(3x)$$

$$\text{پ) } h'(x) = 3 \times \sin^3 x \times \cos x + 3 \cos x \times (-\sin x)$$



$$f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} \quad \text{○/۲۵} \rightarrow f'(-2) = -1 \quad \text{○/۲۵}$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-2)} = -1 \quad \text{○/۲۵}$$

$$\text{مماس : معادله ی خط مماس : } y + 2 = -1(x - 0) \rightarrow y = -x - 2 \quad \text{○/۲۵}$$

۴۵

مشتق پذیر نیست.

۴۶

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2| - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1 \quad \text{○/۲۵}, \quad f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \quad \text{○/۲۵}$$

$$\left. \begin{aligned} y = x \rightarrow m_1 &= 1 \quad \text{○/۲۵} \\ y' = 2x + 2 \quad \text{○/۲۵} \rightarrow m_2 &= 2a + 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2a + 2 = 1 \quad \text{○/۲۵} \rightarrow a = -1 \quad \text{○/۲۵}$$

$$\rightarrow A(-1, -2) \quad \text{○/۲۵}$$

۴۷

$$\begin{cases} F'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) \\ f'(x) = \frac{5}{\sqrt[2]{5x+1}} \Rightarrow F'(x) = \frac{5}{\sqrt[2]{5(x^2+2)+1}} \times 2x^2 \\ g'(x) = 2x^2 \end{cases}$$

۴۸

$$h'(x) = \frac{-5(x+1) - (1)(-5x)}{(x+1)^2} \quad \text{○/۵} \quad \text{○/۲۵}$$

۴۹

$$y = \frac{\left(\frac{-1}{\sqrt[2]{x-1}}\right)}{x-1} \xrightarrow{x=5} y'(5) = m = \frac{\left(\frac{-1}{\sqrt[2]{4}}\right)}{5-1} = -\frac{1}{16} \Rightarrow m = -\frac{1}{16}$$

۵۰



پاسخنامه کلیدی

