نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر : تاریخ برگزاری ۱۴۰۵/۰۲/۱۸

عنوان آزمون : جمع بندی امتحانات نهایی-۲۰اردیبهشت-دوازدهم ریاضی

۱ اگر $f'(۱) = ۳$، $g'(۱) = ۵$ و $f(۱) = ۱$، مقدار مشتق of $(f+g)$ در $x = ۱$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۲ تابع $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - ۴x + ۱$ مفروض است. در نقطهٔ $x = a$، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع کمتر از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰, ۳]$ است، محدودهٔ a را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (۲x^۶ + \sqrt{۲x})^۷$ ب) $g(x) = \frac{۲x^۳ - ۱}{-x^۲ + ۲x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۴ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ را در نقطه $x = ۲$ با استفاده از تعریف مشتق بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۵ اگر $f(x) = |x|(x-۲)$ باشد. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع f را در نقطهٔ $x = ۰$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۶ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = \frac{\sqrt{x+۱}}{x^۳ - ۶x + ۱}$ ب) $g(x) = ۲\tan x + \cos^۵(۲x^۳)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۷ اگر $f(۲) = ۷$ و $\lim_{x\to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{۲x - ۴} = ۵$ باشد، مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ را در $x = ۲$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۸ تابع $f(x) = x^۲ - x$ را درنظر بگیرید.

الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[۰, ۲]$ به دست آورید.

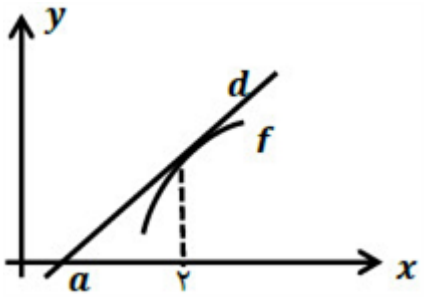
ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه $[۰, ۲]$ بزرگتر باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۹ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} |x| & x < ۰ \\ x^۲ & x \geq ۰ \end{cases}$ را در نقطه $x = ۰$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.

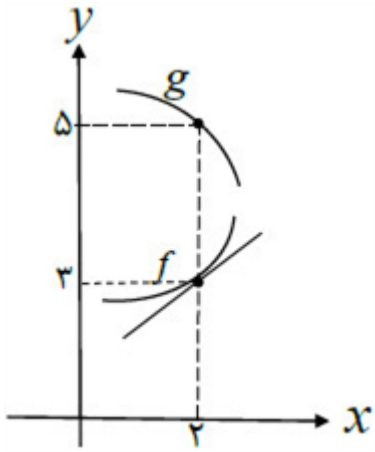
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۱۰ خط d در نقطه با طول $x = ۲$ بر نمودار تابع $f(x) = -x^{۲} + ۶x - ۵$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه برخورد خط d با محور xها) را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۱۱ با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim_{x \to ۲} \frac{f(x)g(x) - ۳g(x)}{x - ۲}$ چند برابر $f'(۲)$ است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۱۲ معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x = ۰$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

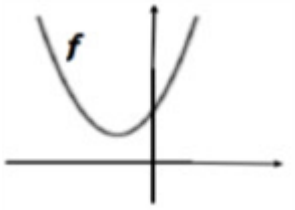
۱۳ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت درنظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -۴t^{۲} + ۴۰t$ به دست می‌آید.

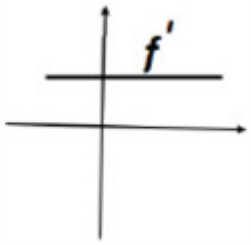
الف) سرعت متوسط در بازه $[۲, ۴]$ را بیابید.

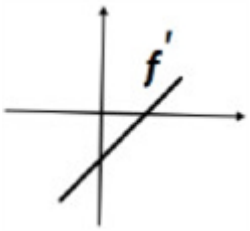
ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟

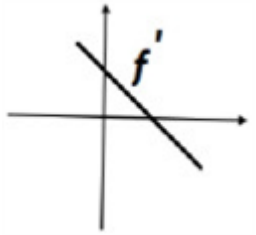
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

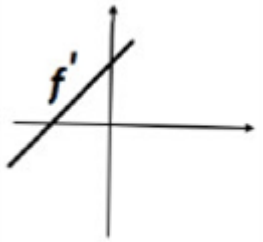
۱۴ با توجه به نمودار تابع f، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۱۵ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x)=\sqrt{۷x}(۳x^{۲}+۲)$ ب) $g(x)=\text{Cos}^{۳}(۲x)-\frac{۱}{x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۱۶ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-۵t^{۲}+۴۰t$ به دست می‌آید. (t برحسب ثانویه)

الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[۳,۴]$ را به دست آورید.

ب) لحظه‌ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر $۲۰\frac{m}{s}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۱۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- تابع f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۱۸ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $g(x)=\frac{(۲x-۱)^{۴}}{x^{۳}+۸}$ ب) $f(x)=\sqrt[۳]{۲x+۱}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۱۹ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- نقطه $(۱,۱)$ یک نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x)=\left|۲-x^{۲}\right|$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۲۰ برای تابع $f(x)=x^{۳}-۸$ در نقطه تقاطع آن با محور xها معادله خط مماس را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۲۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۱ \\ ۳x-۱ & x<۱ \end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۲۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x)=(x^{۲}-۶)^{۳}\left(\frac{۱}{۴}x+۱\right)$

ب) $g(x)=\mathrm{Sin}^{۳}(۵x)$

پ) $h(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^{۳}-۲x+۱}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۰

۲۳ اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<۰ \\ x & x\geq ۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'_{+}(۰)$ و $f'_{-}(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۰

۲۴ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x)=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۳}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۰

۲۵ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x)=\left(\frac{-۳x+۱}{x^{۲}+۵}\right)^{۸}$ ب) $g(x)=\left(\frac{۱}{x}\right)(\sqrt{۳x+۲})$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹

۲۶ تابع f مشتق‌پذیر و با دورهٔ تناوب $\frac{\pi}{۸}$ است. اگر $f'\left(\frac{\pi}{۶}\right)=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $h(x)=f\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)+f\left(۲x-\frac{۲۳\pi}{۲۴}\right)$ باشد، حاصل $h'\left(\frac{\pi}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{-۲}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۲۷ به ازای کدام مقدار a، اختلاف شیب نیم‌خط های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x)=|۴x-۳|\sqrt{\mathrm{ax}}$، در نقطه $x=\frac{۳}{۴}$ برابر $۲\sqrt{۶}$ می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۲۸ اگر $y=۲x+b$ بر نمودار $y=\frac{x+a}{\mathrm{ax}+۱}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

۲۹ فرض کنید $g(x) = ax^۲ + ۵x + b$. اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \le ۲ \\ g'(x) & x > ۲ \end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a + b$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۰ اگر $f(x) = \frac{x^۲}{|۱ - x|}[x]$ باشد، $\lim\limits_{h \to ۰^-} \frac{f(۳ + h) - f(۳)}{h}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۱ در تابع $f(x) = \frac{x}{x - ۱}$، روی بازه‌ی $[۲, ۲/۰۲]$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = ۲$، چه‌قدر بیشتر است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰۱}$ ۳) $\frac{۱}{۵۱}$ ۴) $\frac{۲}{۵۱}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۲ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = x^۳ - x^۲$ در نقطه‌ی $x = ۱$ واقع بر آن، منحنی را در نقطه‌ی دیگر A قطع می‌کند، عرض نقطه‌ی A کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۳ منحنی‌های توابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^۲ + bx + ۳$ برخط به معادله‌ی $y = ۷$ مماس‌اند. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۴ معادله‌ی خط قائم برمنحنی به معادله‌ی $y = \frac{۱}{\sqrt{x}} + x$، در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $y - ۲x = ۰$ ۲) $۲y - x = ۳$ ۳) $y + x = ۳$ ۴) $y + ۲x = ۴$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۵ مقدار مشتق $\sqrt{۱ + \tan^۲\left(\frac{۱}{x}\right)}$ به ازای $x = \frac{۳}{\pi}$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲\pi^۲\sqrt{۳}}{۹}$ ۲) $\frac{-۳\pi^۲}{۹}$ ۳) $\frac{۲\pi^۲}{۹}$ ۴) $\frac{۲\pi^۲\sqrt{۳}}{۹}$

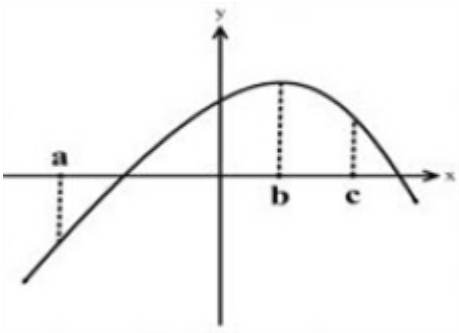
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۶ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} a\sqrt[۳]{x^۲} & x\geq ۱ \\ b+c\sqrt{x^۲} & x<۱ \end{cases}$ در R پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق‌پذیر نباشد، مقدار $\frac{ab}{c^۲}$ کدام است؟ $(c\neq ۰)$

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۷ با توجه به نمودار تابع f، اگر شیب خط مماس در نقاط c,b,a به‌ترتیب با m_c,m_b,m_a نمایش داده شود. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



۱) $m_c>m_b>m_a$ ۲) $m_b>m_a>m_c$ ۳) $m_a>m_b>m_c$ ۴) $m_c=m_b=m_a$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۳۸ در کدام نقطه از منحنی $y=x^۲-۴x+۵$، خط مماس بر منحنی، بر خط $۶y-۳x=۱$ عمود است؟

۱) $(-۲,۱۷)$ ۲) $(-۱,۱۰)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۲,۱)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۹ خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}}$ در نقطه‌ی $x=۴$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-۹۹

۴۰ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \frac{۸}{ax+b} & ;\ x>۲ \\ -x^۳+۶x & ;\ x\leq ۲ \end{cases}$، اگر $f'(۲)$ موجود باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۴۱ مشتق تابع $y=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۴}$، کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۴۲ اگر تابع f در $x=-۲$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=\frac{۱}{۲}$ باشد، آن‌گاه مشتق $x^۲f(x)$ در $x=-۲$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۳ تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{h \to ۰} \frac{f(۲+h) - ۹}{h} = \frac{۳}{۲}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = ۲$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۴ اگر $f(x) = ۱ - |x|$ ، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع با ضابطه‌ی $y = f(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۵ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[۲]{x}}{x} & ;x \geq ۱ \\ ax^۲ + bx & ;x < ۱ \end{cases}$ بر روی R مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) ۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۶ معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۲$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_۲ = ۴$ و $x_۴ \geq ۳$ باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۷ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ $(۱ \leq n \leq ۵۰۰)$ چند عدد وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۸ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۰

۴۹ به چند طریق می‌توان از بین مدادهایی با رنگ‌های، زرد - آبی - قرمز - سبز، ۱۱ مداد انتخاب کرد. اگر بخواهیم از مداد زرد رنگ حداقل دو تا و از مداد سبز رنگ بیش از سه تا داشته باشیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۵۰ الف) سه مدرس A, B, C قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۱۰ – ۸، ۱۲ – ۱۰، ۱۴ – ۱۲ در سه کلاس الف و ب و ج تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هریک از کلاس‌ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. به کمک مربع لاتین چرخشی برای آنها یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

ب) در برنامه قبلی، مدرس A تصمیم دارد با مدرس B برنامه خود را جابه‌جا کند. مربع لاتین جدید را تشکیل دهید و متعامد بودن این دو مربع لاتین را بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۵۱ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده شده به دست آورید.

$$x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۹ \quad (x_i \geq ۰, ۱ \leq i \leq ۴, x_۵ = ۲)$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۵۲ می‌خواهیم ۱۰ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۵۳ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۵۴ حداقل افراد شرکت‌کننده در یک همایش چند نفر باشند، تا با اطمینان بتوان گفت که ۵ نفر از آن‌ها در یک ماه متولد شده‌اند و رقم یکان کد ملی آنها زوج است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۵ به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری‌که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۵۶ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۰

۵۷ در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آن‌که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۵۸ به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۰

۵۹ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹

۶۰ چند عدد طبیعی مانند n، به طوری که $1 \leq n \leq 200$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴، بخش‌پذیر نباشند؟
(بر ۳ بخش‌پذیر نباشند و بر ۴ نیز بخش‌پذیر نباشند.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل

۶۱ جای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب تکمیل کنید.
- در بین ۳۹۰ دانش‌آموز، حداقل ..... نفر روز تولد یکسانی دارند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۶۲ قرار است سه مدرس T_1, T_2, T_3 در سه جلسه متوالی در سه کلاس C_1, C_2, C_3 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده از مربع لاتین، برنامه‌ریزی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۶۳ تعداد توابع یک به یک، از یک مجموعهٔ ۵ عضوی به یک مجموعهٔ ۷ عضوی را به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۴ با ارقام ۶، ۶، ۵، ۱، ۴، ۴، ۴ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۶۵ قرار است سه کارگر با سه نوع ماشین نخ‌ریسی و سه نوع الیاف در سه روز اول هفته کار کنند. به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۶۶ با ارقام ۹, ۷, ۶, ۵, ۳, ۳, ۱, ۱, ۱, ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۶۷ ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آن‌ها روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۶۸ نشان دهید در یک خانواده ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۶۹ هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق، سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۷۰ در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل

پاسخنامه تشریحی

۱ $((f+g)\circ f)'(۱) = f'(۱)\times(f+g)'(f(۱)) = f'(۱)\times(f'(۱)+g'(۱)) = ۳\times(۳+۵) = ۲۴$

۲ آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ $[۰,۳]$:
$$\frac{f(۳)-f(۰)}{۳-۰} = \frac{-۲-۱}{۳} = -۱$$
آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر $f'(x) = x^۲ - ۴$ است.
$$f'(a) < -۱ \Rightarrow a^۲ - ۴ < -۱ \Rightarrow a^۲ < ۳ \Rightarrow -\sqrt{۳} < a < \sqrt{۳}$$

۳ الف) $f'(x) = ۷(۲x^۶ + \sqrt{۲x})^۶\left(۱۲x^۵ + \frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}\right)$

ب) $g'(x) = \frac{۶x^۲(-x^۲+۲x) - (-۲x+۲)(۲x^۳-۱)}{(-x^۲+۲x)^۲}$

۴ $\lim\limits_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim\limits_{x\to۲}\frac{\sqrt{x^۲-۴x+۴}-۰}{x-۲} = \lim\limits_{x\to۲}\frac{|x-۲|}{x-۲} = \begin{cases}\lim\limits_{x\to۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲} = -۱\\ \lim\limits_{x\to۲^+}\frac{x-۲}{x-۲} = ۱\end{cases}$

پس $f(x)$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

۵ $f'(۰) = \lim\limits_{x\to۰}\frac{|x|(x-۲)-f(۰)}{x-۰} = \begin{cases}f'_-(۰) = \lim\limits_{x\to۰^-}\frac{-x(x-۲)-۰}{x} = +۲\\ f'_+(۰) = \lim\limits_{x\to۰^+}\frac{x(x-۲)-۰}{x} = -۲\end{cases}$

چون $f'_+(۰) \neq f'_-(۰)$، لذا تابع f در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

۶ الف) $f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}(x^۳-۶x+۱) - (۳x^۲-۶)\sqrt{x+۱}}{(x^۳-۶x+۱)^۲}$

ب) $g'(x) = ۲(۱+\tan^۲ x) + (۵)(۶x^۲)(-\sin(۲x^۳))\cos^۴(۲x^۳)$

۷ $\frac{۱}{۲}\lim\limits_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \frac{۱}{۲}f'(۲) = ۵ \Rightarrow f'(۲) = ۱۰$
$$g'(x) = ۱\times f(x) + x\times f'(x) \Rightarrow g'(۲) = ۱\times۷ + ۲\times۱۰ = ۲۷$$

۸ الف) آهنگ متوسط در بازه $[۰,۲] = \frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰} = \frac{۲-۰}{۲} = ۱$

ب) آهنگ لحظه ای $= f'(x) = ۲x-۱ \Rightarrow ۲x-۱ > ۱ \Rightarrow x > ۱$

۹ f پیوسته است.

$$\left.\begin{aligned} f'_-(۰) = \lim\limits_{x\to۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim\limits_{x\to۰^-}\frac{|x|-۰}{x} = -۱\\ f'_+(۰) = \lim\limits_{x\to۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim\limits_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۰}{x} = ۰\end{aligned}\right\} \Rightarrow f'_-(۰) \neq f'_+(۰)$$ مشتق ناپذیر

۱۰ $f'(x) = -۲x + ۶ \Rightarrow f'(۲) = ۲$

$d : (۲, ۳), (a, ۰) : ۲ = \dfrac{۰ - ۳}{a - ۲} \Rightarrow a = \dfrac{۱}{۲}$

۱۱ $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{f(x)g(x) - ۳g(x)}{x - ۲} = \lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{f(x)g(x) - f(۲)g(x)}{x - ۲} = \lim\limits_{x \to ۲} g(x) \dfrac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}$

$= \lim\limits_{x \to ۲} g(x) \lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = ۵f'(۲)$

۱۲ $f'(۰) = m = \lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\sqrt[۳]{x} - ۰}{x} = \lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} = +\infty, A(۰, ۰)$

معادله مماس قائم: $x = ۰$

۱۳ الف) سرعت متوسط $= \dfrac{h(۴) - h(۲)}{۴ - ۲} = \dfrac{۹۶ - ۶۴}{۲} = ۱۶$

ب) $h'(t) = -۸t + ۴۰ = ۱۶ \Rightarrow t = ۳$

۱۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور xها را در ناحیه $x < ۰$ قطع می‌کند.

x	$x_S < ۰$	
f	نزولی	صعودی
f'	−	+

۱۵ الف) $f'(x) = \dfrac{۷}{۲\sqrt{۷x}}(۳x^۲ + ۲) + \sqrt{۷x}(۶x)$

ب) $g'(x) = ۳(-۲ \operatorname{Sin} ۲x)(\operatorname{Cos}^۲ ۲x) - \left(-\dfrac{۱}{x^۲}\right)$

۱۶ الف) روش اول : $\dfrac{h(۴) - h(۳)}{۴ - ۳} = \dfrac{۸۰ - ۷۵}{۱} = ۵$

روش دوم : سرعت متوسط $= h'(۳/۵) = -۱۰(۳/۵) + ۴۰ = ۵$

ب) $h'(t) = -۱۰t + ۴۰ \Rightarrow -۱۰t + ۴۰ = ۲۰ \Rightarrow t = ۲$

۱۷ درست

۱۸ الف) $g'(x) = \dfrac{۴ \times ۲ \times (۲x - ۱)^۳(x^۳ + ۸) - ۳x^۲(۲x - ۱)^۴}{(x^۳ + ۸)^۲}$

ب) $f'(x) = \dfrac{۲}{۳\sqrt[۳]{(۲x + ۱)^۲}}$

۱۹ نادرست

۲۰

$x^{۳}-۸=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow (۲,۰)$

$f'(x)=۳x^{۲} \Rightarrow m=f'(۲)=۱۲\,, y-۰=۱۲(x-۲) \Rightarrow y=۱۲x-۲۴$

۲۱ تابع در $x=۱$ پیوسته است.

$$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}+۱-۲}{x-۱}=۲, f'_{-}(۱)=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{۳x-۱-۲}{x-۱}=۳$$

$f'_{+}(۱)\neq f'_{-}(۱)$ پس تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۲۲

الف) $f'(x)=۳(۲x)(x^{۲}-۶)^{۲}\left(\frac{۱}{۴}x+۱\right)+\frac{۱}{۴}(x^{۲}-۶)^{۲}$

ب) $g'(x)=۱۵\,\mathrm{Sin}^{۲}(۵x)\,\mathrm{Cos}\,(۵x)$

پ) $h'(x)=\dfrac{\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)(x^{۳}-۲x+۱)-(۳x^{۲}-۲)(\sqrt{x})}{(x^{۳}-۲x+۱)^{۲}}$

۲۳ تابع در $x=۰$ پیوسته است.

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x-۰}{x-۰}=۱$$

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{x^{۲}-۰}{x-۰}=۰$$

$f'_{+}(۰)\neq f'_{-}(۰)$ پس مشتق تابع در $x=۰$ موجود نیست.

۲۴

الف) $f'(x)=\dfrac{\sqrt[۹]{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^{۲}}$

ب) $g'(x)=(۶x)(۲x-۵)^{۳}+(۳)(۲)(۲x-۵)^{۲}(۳x^{۲}-۴)$

۲۵

الف) $f'(x)=۸\left(\dfrac{-۳x+۱}{x^{۲}+۵}\right)^{۷}\times\left(\dfrac{-۳(x^{۲}+۵)-۲x(-۳x+۱)}{(x^{۲}+۵)^{۲}}\right)$

ب) $g'(x)=\left(-\dfrac{۱}{x^{۲}}\right)(\sqrt{۳x+۲})+\left(\dfrac{۱}{x}\right)\left(\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}\right)$

۲۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$h'(x)=f'\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)+۲f'\left(۲x-\frac{۲۳\pi}{۲۴}\right) \Rightarrow h'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=f'\left(\frac{\pi}{۶}\right)+۲f'\left(\frac{\pi}{۲۴}\right)$$

$$\overset{\otimes}{\rightarrow} h'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۳f'\left(\frac{\pi}{۶}\right)=۳\times\frac{-۱}{\sqrt{۳}}=-\sqrt{۳}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{۲۴}\right)=f'\left(\frac{\pi}{۲۴}+\frac{\pi}{۸}\right)=f'\left(\frac{\pi}{۶}\right)\otimes$$

۲۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\sqrt[۴]{ax}\left|x-\frac{۳}{۴}\right| \Rightarrow \begin{cases} f'_{+}\left(\frac{۳}{۴}\right)=\sqrt[۴]{a\left(\frac{۳}{۴}\right)}=\sqrt[۲]{۳a} \\ f'_{-}\left(\frac{۳}{۴}\right)=-\sqrt[۴]{a\left(\frac{۳}{۴}\right)}=-\sqrt[۲]{۳a} \end{cases}$$

$$f'_{+}\left(\frac{۳}{۴}\right)-f'_{-}\left(\frac{۳}{۴}\right)=\sqrt[۴]{۳a}=\sqrt[۲]{۶} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۶\times ۳a=۴\times ۶ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۲۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} x=۱ \Rightarrow y=b+۲ \\ x=۱ \Rightarrow y=\frac{a+۱}{a+۱}=۱ \end{array}\right\} b+۲=۱ \Rightarrow b=-۱$$

$$y'_{(۱)}=۲ \Rightarrow \frac{۱-a^{۲}}{(a+۱)^{۲}}=۲ \Rightarrow \frac{۱-a}{۱+a}=۲ \Rightarrow a=\frac{-۱}{۳} \Rightarrow a-b=\frac{-۱}{۳}+۱=\frac{۲}{۳}$$

۲۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+۵x+b & x\le ۲ \\ ۲ax+۵ & x>۲ \end{cases}$$

شرط پیوستگی : $\cancel{۴a}+۱۰+b=\cancel{۴a}+۵ \Rightarrow b=-۵$

شرط مشتق های راست و چپ : $۲ax+۵=۲a \Rightarrow ۴a+۵=۲a \Rightarrow ۲a=-۵ \Rightarrow a=\frac{-۵}{۲}$

$$\Rightarrow -۵+\left(\frac{-۵}{۲}\right)=\frac{-۱۵}{۲}$$

۳۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{x^{۲}}{|۱-x|}.[x] \Rightarrow \lim_{h\to ۰^{-}} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=?=f'_{-}(۳)$$

$$x\to ۳^{-} : f(x)=\frac{x^{۲}}{x-۱}.\left[۳^{-}\right]=\frac{۲x^{۲}}{x-۱} \Rightarrow f'(x)=\frac{(۴x)(x-۱)-(۱)(۲x^{۲})}{(x-۱)^{۲}} \xrightarrow[x=۳]{\text{جایگذاری}}$$

$$f'_{-}(۳)=\frac{(۱۲)(۲)-(۱)(۱۸)}{۴}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

تذکر: در اصل این حد وجود ندارد چون f در $x=۳$ پیوستگی چپ ندارد ولی متأسفانه غلط مورد علاقه کنکور سراسری است که منظور طراح سؤال همین راه حل است.

۳۱ گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{(x-۱)^۲}$$

آهنگ متوسط تغییر تابع f نسبت به متغیر x روی بازه‌ی $=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(۲/۰۲)-f(۲)}{۲/۰۲-۲}=\frac{\frac{۲/۰۲}{۲/۰۲-۱}-\frac{۲}{۲-۱}}{۰/۰۲}=$

$[۲, ۲/۰۲]$

$$\frac{\frac{\frac{۲۰۲}{۱۰۰}}{\frac{۲۰۲}{۱۰۰}-۱}-\frac{۲}{۲-۱}}{\frac{۲}{۱۰۰}}=\frac{\frac{۲۰۲}{۱۰۲}-۲}{\frac{۲}{۱۰۰}}=\frac{\frac{-۲}{۱۰۲}}{\frac{۲}{۱۰۰}}=-\frac{۵۰}{۵۱}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=۲=f'(۲)=\frac{-۱}{(۲-۱)^۲}=-۱$

$$\Rightarrow \text{آهنگ متوسط - آهنگ لحظه‌ای}=\left(-\frac{۵۰}{۵۱}\right)-(-۱)=\frac{-۵۰+۵۱}{۵۱}=\frac{۱}{۵۱}$$

۳۲ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $x=۱$ را نوشته و سپس معادله‌ی تلاقی این خط و منحنی را تشکیل داده وصل می‌کنیم.

$$y=x^۳-x^۲\Rightarrow y'=۳x^۲-۲x$$

$$x_{\text{تماس}}=۱\Rightarrow y_{\text{تماس}}=۱^۳-۱^۲=۰\Rightarrow \text{نقطه ی تماس}(۱, ۰)$$

$$m_{\text{مماس}}=y'(۱)=۳(۱)^۲-۲(۱)=۱\xrightarrow{\text{معادله ی خط مماس}}y-۰=۱(x-۱)\Rightarrow y=x-۱$$

$$\begin{cases}y=x^۳-x^۲\\ y=x-۱\end{cases}\xrightarrow{\text{معادله ی تقاطع}}x^۳-x^۲=x-۱\Rightarrow x^۳-x^۲-x+۱=$$

$$x^۲(x-۱)-(x-۱)=۰\Rightarrow (x-۱)(x^۲-۱)=۰\Rightarrow (x-۱)^۲(x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=۱ & \text{طول نقطه تماس}\\ x_A=-۱\Rightarrow y_A=(-۱)^۳-(-۱)^۲=-۱-۱=-۲\Rightarrow A(-۱,-۲) & \end{cases}$$

۳۳ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. منحنی‌های توابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^۲+bx+۳$ برخط به معادله‌ی $y=۷$ مماس‌اند، پس معادله‌ی تقاطع خط با منحنی‌ها، ریشه‌ی مضاعف دارد. داریم:

$$\begin{cases}f(x)=-x^۲+bx+۳\\ y=۷\end{cases}\xrightarrow{\text{معادله ی تقاطع}}-x^۲+bx+۳=۷\Rightarrow$$

$$x^۲-bx+۴=۰\xrightarrow[\Delta=۰]{\text{ریشه ی مضاعف}}b^۲-۱۶=۰\Rightarrow b=\pm ۴$$

حال با جای‌گذاری مقادیر به‌دست آمده برای b در معادله‌ی تقاطع، مختصات نقاط تماس خط با منحنی‌ها را مشخص کرده و فاصله‌ی آن‌ها را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$b=۴\xrightarrow{\text{معادله ی تقاطع}}x^۲-۴x+۴=۰\Rightarrow (x-۲)^۲=۰\Rightarrow x_{\text{تماس}}=۲\Rightarrow$$

$$b=-۴\xrightarrow{\text{معادله ی تقاطع}}x^۲+۴x+۴=۰\Rightarrow (x+۲)^۲=۰\Rightarrow x_{\text{تماس}}=-۲\Rightarrow$$

$$y=۷\xrightarrow{\text{نقطه ی تماس}}A(۲,۷)$$

$$\Rightarrow \text{AB}=|x_A-x_B|=۴$$

$$y=۷\xrightarrow{\text{نقطه ی تماس}}B(-۲,۷)$$

۳۴ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. برای نوشتن معادله‌ی خط قائم برمنحنی به معادله‌ی $y = \frac{۱}{\sqrt{x}} + x$، در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، ابتدا مختصات پای قائم را تکمیل می‌کنیم. سپس مقدار مشتق تابع را در $x = ۱$ محاسبه کرده و عکس و قرینه می‌کنیم تا شیب خط قائم در این نقطه مشخص شود. داریم:

$$x = ۱ \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} y = ۱ + ۱ = ۲ \xrightarrow{\text{پای قائم}} A(۱, ۲)$$

$$y' = \frac{۰(\sqrt{x}) - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱)}{(\sqrt{x})^۲} + ۱ \Rightarrow y' = \frac{-۱}{۲x\sqrt{x}} + ۱ \Rightarrow y'(۱) = -\frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{m_{\text{مماس}}} = -\frac{۱}{y'(۱)} = -۲ \xrightarrow{\text{معادله ی خط قائم}} y - ۲ = -۲(x - ۱) \Rightarrow$$

$$y = -۲x + ۴ \Rightarrow y + ۲x = ۴$$

۳۵ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \left(-\frac{۱}{x^۲}\right)\left(۲\tan\frac{۱}{x}\right)\left(۱ + \tan^۲\left(\frac{۱}{x}\right)\right) \cdot \frac{۱}{۲\sqrt{۱ + \tan^۲\left(\frac{۱}{x}\right)}}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{۳}{\pi}\right) = -\frac{\pi^۲}{۹}(۲\sqrt{۳})(۴)\left(\frac{۱}{۴}\right) = \frac{-۲\pi^۲\sqrt{۳}}{۹}$$

۳۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$a = b + c\ (*)$: پیوستگی در $x = ۱$

$$f'(x) = \begin{cases} a \times \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} & x \geq ۱ \\ c & ۰ < x < ۱ \end{cases}, f'_+(۱) = f'_-(۱) \Rightarrow \frac{۲}{۳}a = c \xrightarrow{*}$$

$$a = b + \frac{۲}{۳}a \Rightarrow b = \frac{۱}{۳}a \Rightarrow \frac{ab}{c^۲} = \frac{a \times \frac{۱}{۳}a}{\frac{۴}{۹}a^۲} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

۳۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب خط $۶y - ۳x = ۱$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس در نقطهٔ مطلوب، شیب خط مماس باید برابر ۲- باشد.

$$\Rightarrow y' = ۲x - ۴ = -۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = ۲$$

نقطهٔ مطلوب $(۱, ۲)$ است.

۳۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x_۰ = ۴ \Rightarrow y_۰ = ۸$$

$$f'(x) = \frac{۵\sqrt{x} - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵x - ۴)}{(\sqrt{x})^۲} \Rightarrow m = \frac{۳}{۲}$$

$$y - ۸ = \frac{۳}{۲}(x - ۴) \xrightarrow{x=۰} y = ۲$$

۴۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۸}{ax+b} & x>۲\\ -x^۳+۶x & x\le ۲\end{cases}$$

شرط پیوستگی : $\frac{۸}{۲a+b}=-۸+۱۲\Rightarrow ۸=(۲a+b)^۴\Rightarrow ۲a+b=۲$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲} & x>۲\\ -۳x^۲+۶ & x\le ۲\end{cases}\Rightarrow \frac{-۸a}{(۲a+b)^۲}=-۳(۲)^۲+۶$$

$$\Rightarrow \frac{-۸a}{۴}=-۶\Rightarrow -۸a=-۲۴\Rightarrow a=۳$$

۴۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y'=\frac{-(\sin x+\cos x)^۲+(\cos x-\sin x)^۲}{(\cos x+\sin x)^۲}\to f'\left(\frac{\pi}{۴}\right)=-۱$$

۴۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(x^۲f(x))'=۲xf(x)+x^۲f'(x)\xrightarrow{x=-۲}-۴f(-۲)+۴f'(-۲)=-۴(-۳)+۴\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}f(-۲)=-۳\\ f'(-۲)=\frac{۱}{۲}\end{cases}=۱۲+۲=۱۴$$

۴۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

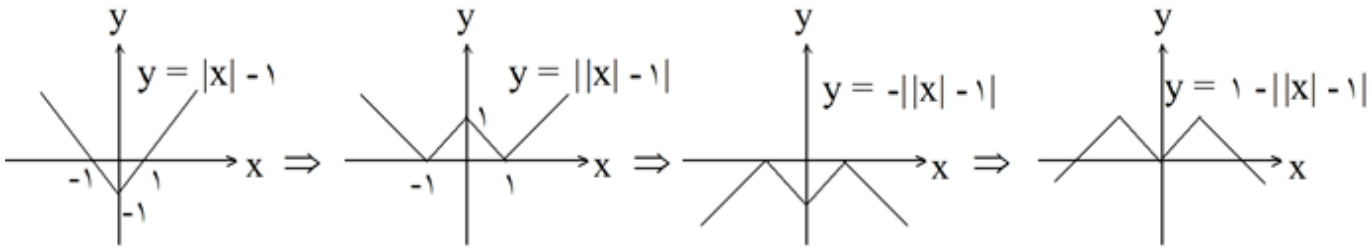
$$\Rightarrow\begin{cases}f(۲)=۹\\ f'(۲)=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$g(x)=x\sqrt{f(x)}\Rightarrow g'(x)=\sqrt{f(x)}+\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}\times x$$

$$\xrightarrow{x=۲} g'(۲)=\sqrt{f(۲)}+\frac{f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}}\times ۲=۳+\frac{\frac{۳}{۲}}{۶}\times ۲=۳/۵$$

۴۴ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$y=f(f(x))=۱-|۱-|x||=۱-||x|-۱|$$



تابع در ۳ نقطه‌ی $\{-۱,۰,۱\}$ مشتق ندارد.

۴۵ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۲}{\sqrt{x}} & x\ge ۱\\ ax^۲+bx & x<۱\end{cases}\xrightarrow{\text{شرط پیوستگی در } x=۱} a+b=۲$$

$$f'_-(۱)=f'_+(۱)\Rightarrow ۲a+b=\frac{-۱}{۱\sqrt{۱}}\Rightarrow ۲a+b=-۱\Rightarrow\begin{matrix}a=-۳\\ b=۵\end{matrix}$$

۴۶

$x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۸$ (ص ۶۱)

$x_۴ - ۳ = y_۴ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + y_۴ = ۵ \Rightarrow \binom{۷}{۲} = ۲۱$

۴۷

$|A| = \left[\frac{۵۰۰}{۵}\right] = ۱۰۰ , |B| = \left[\frac{۵۰۰}{۴}\right] = ۱۲۵ , |A \cap B| = \left[\frac{۵۰۰}{۲۰}\right] = ۲۵$

$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = ۵۰۰ - (۱۰۰ + ۱۲۵ - ۲۵) = ۳۰۰$ (ص ۷۵)

۴۸

$|F| = ۱۵, |V| = ۱۱, |B| = ۹, |F \cap V| = ۵, |B \cap V| = ۶, |F \cap B| = ۳$

$\Rightarrow |F \cap B \cap V| = ۳$

فقط فوتبال بازی کنند. $= |F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V| = ۱۵ - ۵ - ۳ + ۳ = ۱۰$

فقط والیبال بازی کنند. $= |V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V| = ۱۱ - ۵ - ۶ + ۳ = ۳$

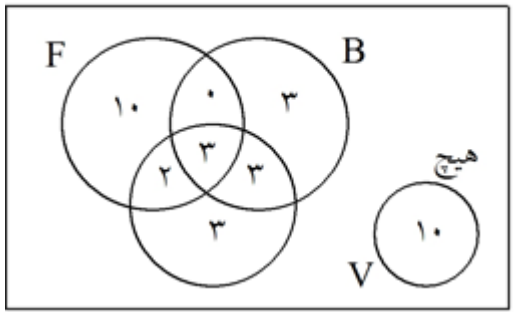
فقط بسکتبال بازی کنند. $= |B| - |F \cap B| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V| = ۹ - ۳ - ۶ + ۳ = ۳$

$\Rightarrow ج = ۱۰ + ۳ + ۳ = ۱۶$ (ص ۸۳)

روش دوم:

از نمودار ون کمک می‌گیریم. کافی است از اشتراک ۳ تایی شروع کنیم و به سمت اشتراک ۲ تایی و اعضای کلی مجموعه‌ها برسیم.

$M = ۳۴$



فقط یکی $\longrightarrow ۱۰ + ۳ + ۳ = ۱۶$

۴۹ راه اول:

$x_۱ =$ تعداد مداد زرد و $x_۲ =$ تعداد مداد آبی و $x_۳ =$ تعداد مداد قرمز و $x_۴ =$ تعداد مداد سبز

$x_۲, x_۳ \geq ۰ , x_۱ \geq ۲ , x_۴ > ۳ \rightarrow x_۴ \geq ۴$

$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۱ \Rightarrow x_۱ - ۲ + x_۲ + x_۳ + x_۴ - ۴ = ۱۱ - ۲ - ۴ \Rightarrow y_۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴$

$= ۵, y_۱, x_۲, x_۳, y_۴ \geq ۰$

$\binom{۵ + ۴ - ۱}{۴ - ۱} = \binom{۸}{۳} = ۵۶$

راه دوم:

$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۱$

$x_۱ \geq ۲, x_۲, x_۳ \geq ۰, x_۴ \geq ۴ \Rightarrow \binom{۱۱ - ۲ - ۴ + ۴ - ۱}{۴ - ۱} = \binom{۸}{۳} = ۵۶$

۵۰

الف) $A=۱, B=۲, C=۳$

ب) $۱ \to ۲, ۲ \to ۱, ۳ \to ۳$

$$M=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & ۸-۱۰ & ۱۰-۱۲ & ۱۲-۱۴ \\ \hline \text{الف} & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \text{ب} & ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline \text{پ} & ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

$$MN=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & ۸-۱۰ & ۱۰-۱۲ & ۱۲-۱۴ \\ \hline \text{الف} & ۱۲ & ۲۱ & ۳۳ \\ \hline \text{ب} & ۳۳ & ۱۲ & ۲۱ \\ \hline \text{ج} & ۲۱ & ۳۳ & ۱۲ \\ \hline \end{array}$$

$$N=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & ۸-۱۰ & ۱۰-۱۲ & ۱۲-۱۴ \\ \hline \text{الف} & ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline \text{ب} & ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \text{ج} & ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline \end{array}$$

دو مربع لاتین متعامد نیستند زیرا در ماتریس ادغام شده درایه تکراری وجود دارد.

۵۱

$$x_۱+۴x_۲+x_۳+x_۴+۲=۹ \Rightarrow x_۱+۴x_۲+x_۳+x_۴=۷$$

$$x_۲=۰ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۹ \Rightarrow \binom{۹}{۲}=۳۶ \Rightarrow ۳۶+۱۰=۴۶$$

$$x_۲=۱ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۵ \Rightarrow \binom{۵}{۲}=۱۰$$ (ص ۷۱)

۵۲

روش اول: $۵\times۴\times۳\times۲\times۱\times(۲!)^۵=۳۸۴۰$

روش دوم: $(۱۰\times۱)\times(۸\times۱)\times(۶\times۱)\times(۴\times۱)\times(۲\times۱)=۳۸۴۰$

۵۳

$$x_۳=۴, x_۵ \geq ۳ \Rightarrow x_۵=y_۵+۳$$

$$x_۱+x_۲+۴+x_۴+۳+y_۵+x_۶=۱۲ \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۴+y_۵+x_۶=۵ \Rightarrow ج=\binom{۹}{۴}$$ (ص ۷۱)

۵۴

تعداد حالات یکان زوج کدملی× تعداد ماه‌ها = تعداد لانه‌ها $\Rightarrow n=۱۲\times۵=۶۰$

$$k+۱=۵ \Rightarrow k=۴ \text{ تعداد کبوترها} = nk+۱ \xrightarrow[k=۴]{n=۶۰} ۶۰\times۴+۱=۲۴۱$$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری حداقل ۲۴۱ نفر موردنیاز است. (ص ۸۳)

۵۵

این سؤال معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که از مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضو می‌توان نوشت. (ص ۷۸)

$$۳^۵-(۳\times۲^۵-۳)=۲۴۳-۹۳=۱۵۰$$

۵۶ برای این‌که مجموع دو عدد زوج باشد، هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو فرد. بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می‌گیرد. یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد. (ص ۸۳)

۵۷ $|\overline{F \cup V}| = |S| - |F \cup V| = ۲۵ - (۱۵ + ۱۴ - ۹) = ۵$ (ص ۷۴)

۵۸ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۲, x_۱ \geq ۱, x_۴ > ۳, x_۶ = ۱$

$y_۱ = x_۱ - ۱, y_۱ \geq ۰, y_۴ = x_۴ - ۴, y_۴ \geq ۰$

$y_۱ + ۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + ۴ + x_۴ + ۱ = ۱۲ \Rightarrow y_۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + x_۵ = ۶$

$\Rightarrow ج = \binom{۱۰}{۴}$ (ص ۷۱)

۵۹ $x_۱ + \ldots + x_۵ = ۱۱, x_۲ \geq ۲, x_۵ \geq ۴$ (قسمت پ تمرین ۸ ص ۷۱)

$x_۱ + y_۲ + ۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + ۴ = ۱۱ \Rightarrow x_۱ + y_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ = ۵$

$\Rightarrow جواب = \binom{۵ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۹}{۴}$

۶۰ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (۰/۲۵)

$n(A \cup B) = \left[\frac{۲۰۰}{۴}\right] + \left[\frac{۲۰۰}{۳}\right] - \left[\frac{۲۰۰}{۱۲}\right]$ (۰/۷۵)

$n(A \cup B) = ۱۰۰$ (۰/۲۵)

$۱ - n(A \cup B) = ۲۰۰ - ۱۰۰ = ۱۰۰$ (۰/۲۵)

(صفحات: ۷۵ و ۷۶)

۶۱ ۲

۶۲ فرض کنیم هر سطر نشان‌دهنده هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس‌های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین ۳×۳ زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می‌شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد. (ص ۶۲)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۶۳ اگر فرض کنیم $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵\}$ و $B = \{b_۱, b_۲, b_۳, \ldots, b_۷\}$، برای تعریف f روی هر عضو A، ۷ انتخاب داریم، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل تابع‌های یک به یک برابر است با $\frac{۷!}{۲!} = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳$ (اگر دانش‌آموزی از فرمول $\frac{۷!}{۲!} = (۷)_۵$ پاسخ دهد نمره کامل داده شود.) (ص ۷۸)

۶۴ $\frac{۷!}{۲! \times ۳!}$ (ص ۵۸)

۶۵

A =

	w_1	w_2	w_3
شنبه	1	2	3
یکشنبه	3	1	2
دوشنبه	2	3	1

B =

	w_1	w_2	w_3
شنبه	3	1	2
یکشنبه	1	2	3
دوشنبه	2	3	1

$\Rightarrow$

	w_1	w_2	w_3
شنبه	13	21	32
یکشنبه	31	12	23
دوشنبه	22	33	11

چون اعداد دو رقمی تکراری در مربع ساخته شده وجود ندارد پس متعامدند.

۶۶

$\frac{۹!}{۳!\times ۲!}$ (ص ۵۸)

۶۷

تعداد کبوترها = ۵۰۵ و تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای هفته$\times$ تعداد ماه‌های سال. $n = ۷\times ۱۲ = ۸۴$ طبق تعمیم اصل لانه کبوتری:

$$\text{تعداد کبوترها} = \mathrm{kn} + ۱ \xrightarrow{n=۸۴} ۵۰۵ = k\times ۸۴ + ۱ \Rightarrow k = ۶ \Rightarrow k + ۱ = ۷$$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (ص ۸۳)

۶۸

فصل تولد = لانه = ۴ و افراد خانواده = کبوتر = ۵. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می‌گیرند (در یک فصل به دنیا آمده‌اند). (ص ۸۰)

۶۹

$\binom{۸}{۴}\binom{۴}{۳}\binom{۱}{۱}$ (ص ۵۹)

۷۰

در این مسأله $k + ۱ = ۷$ یعنی $k = ۶$ است و تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n = ۱۲$ است. $(۰/۵)$

طبق اصل لانه کبوتری، تعداد کبوترها یا معادل آن تعداد دانش‌آموزان حداقل باید $(۰/۲۵)$

$\mathrm{kn} + ۱ = (۱۲\times ۶) + ۱ = ۷۳$ باشد $(۰/۵)$

(صفحه: ۸۳)

پاسخنامه کلیدی

۲۶	۱	۲	۳	**۴**
۲۷	۱	۲	**۳**	۴
۲۸	۱	۲	**۳**	۴
۲۹	**۱**	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	**۴**
۳۱	۱	۲	**۳**	۴
۳۲	۱	**۲**	۳	۴
۳۳	۱	**۲**	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	**۴**
۳۵	**۱**	۲	۳	۴
۳۶	**۱**	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	**۳**	۴
۳۸	۱	۲	**۳**	۴
۳۹	۱	۲	**۳**	۴
۴۰	۱	۲	**۳**	۴
۴۱	**۱**	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	**۴**
۴۳	۱	۲	**۳**	۴
۴۴	۱	۲	**۳**	۴
۴۵	۱	۲	۳	**۴**