



نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

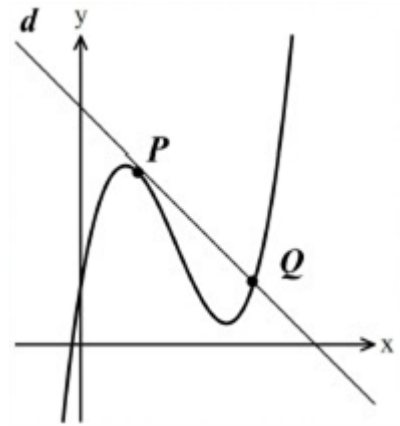
تاریخ برگزاری ۱۴۰۵/۰۲/۱۴

عنوان آزمون : حسابان ۲- تشریحی- فصل ۴

۱ تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ مفروض است. در نقطه $x = a$ ، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع کمتر از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 3]$ است، محدوده a را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۲ مطابق شکل زیر خط d در نقطه $P(1, 3)$ بر نمودار تابع f مماس و در نقطه $Q(a+1, a)$ آن را قطع می‌کند. اگر $f'(1) = -1$ ، مقدار a را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۳ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ را در نقطه $x = 2$ با استفاده از تعریف مشتق بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- خط $x = 2$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ در نقطه $(2, 0)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۵ اگر $f(2) = 7$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{2x - 4} = 5$ باشد، مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ را در $x = 2$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۶ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

ب) $g(x) = \sin^2 x + \tan(x^2)$

الف) $f(x) = (x^2 + 1)^2 (\sqrt{3x + 2})$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳



۷ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

$$f(x) = (x - 6)^2 + \frac{5x + 3}{\sqrt{2x - 1}}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۸ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} |x| & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۹ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

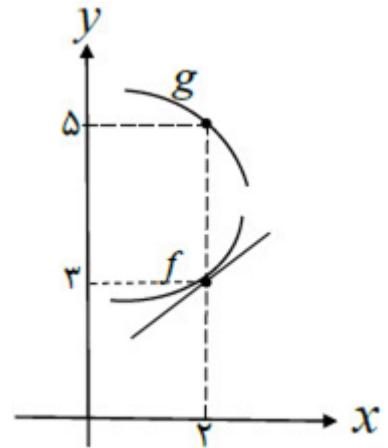
اگر $f'(4) = 2$ و $f(4) = -1$ ، خط مماس بر نمودار f در $x = 4$ ، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض قطع می‌کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۱۰ اگر $f(x) = 2x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشند. حاصل $(f \times g)'(1) + (f + g)'(4)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۱۱ با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2}$ چند برابر $f'(2)$ است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۱۲ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -4t^2 + 40t$ به دست می‌آید.

الف) سرعت متوسط در بازه $[2, 4]$ را بیابید.

ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۱۳ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t$ گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم توده

باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه زمانی $0 \leq t \leq 4$ می‌شود؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۱۴ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف) $f(x) = \sqrt{2x(3x^2 + 2)}$ ب) $g(x) = \cos^2(2x) - \frac{1}{x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱



۱۵ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$f(x) = \sqrt{\frac{9x - 2}{x + 1}}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۱۶ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x + 5}$ را وقتی متغیر از $x = -1$ به $x = 4$ تغییر می‌کند، به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۱۷ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^3 + t - 1$ است: الف) سرعت متوسط متحرک در بازه $[1, 2]$ را محاسبه کنید. ب) سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = 2$ چقدر است؟

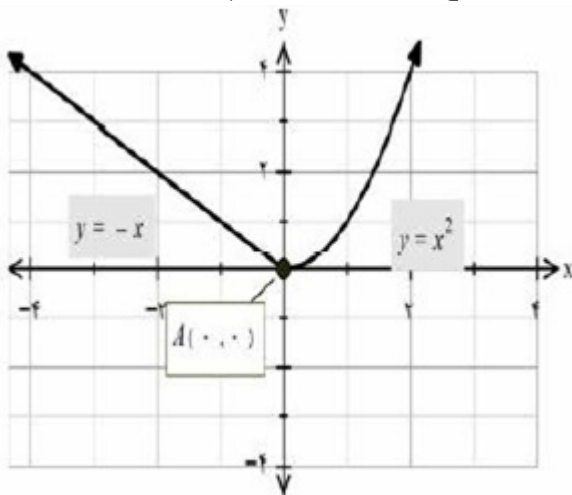
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۱۸ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$f(x) = (x^2 + 2x - 1)^5 \quad \text{الف)} \quad g(x) = (\sqrt{3x + 2})(x^3 + 1) \quad \text{ب)}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۱۹ با محاسبه مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید این تابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیست.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۲۰ درست یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر خط $x = a$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $(a, f(a))$ باشد آن‌گاه $f'(a)$ موجود است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۲۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹



۲۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

ب) $g(x) = (x^2+3x+1)^y$

پ) $h(x) = \frac{x^2-5x+7}{-2x+9}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۲۳ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

۲۴ مشتق توابع زیر را به دست آورید.

ب) $g(x) = \text{Cos}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

الف) $f(x) = (2x^3 + \sqrt{x} - 1)^4$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

۲۵ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸



پاسخنامه تشریحی

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{-2 - 1}{3} = -1$$

آهنگ متوسط تغییر در بازه $[0, 3]$: ۱

آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر $f'(x) = x^2 - 4$ است.

$$f'(a) < -1 \Rightarrow a^2 - 4 < -1 \Rightarrow a^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$$

خط d در نقطه $P(1, 3)$ بر تابع $f(x)$ مماس است، بنابراین شیب خط d برابر -1 است.

روش اول: معادله خط d به صورت زیر است:

$$y - 3 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 4 \xrightarrow{Q(2a+1, a) \in d} a = -2a - 1 + 4 \Rightarrow a = 1$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a - 3}{2a + 1 - 1} = -1 \Rightarrow a = 1 \quad \text{روش دوم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}x + 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1 \end{cases}$$

پس $f(x)$ در $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.

درست ۴

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{2} f'(2) = 5 \Rightarrow f'(2) = 10$$

$$g'(x) = 1 \times f(x) + x \times f'(x) \Rightarrow g'(2) = 1 \times 7 + 2 \times 10 = 27$$

الف) $f'(x) = 2 \times 3x^2(x^2 + 1)(\sqrt{3x + 2}) + \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}}(x^2 + 1)^2$

ب) $g'(x) = 2 \times 3 \times \cos 3x \sin 3x + 2x(1 + \tan^2(x^2))$

(اگر دانش‌آموزی به صورت $3 \sin^2 x$ بنویسید، نمره بارم این قسمت تعلق گیرد.)

$$f'(x) = 3(x - 2)^2 + \frac{5(\sqrt{2x - 1}) - \frac{2}{2\sqrt{2x - 1}}(5x + 3)}{(\sqrt{2x - 1})^2}$$

f پیوسته است. ۸

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر}$$

۹ -۹



$$(f + g)'(4) = f'(4) + g'(4) = (6^4)^2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 96 + \frac{1}{4}$$

$$f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = (6)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(3) = 6 + \frac{3}{2}$$

$$(f + g)'(4) + (f \times g)'(1) = 96 + \frac{1}{4} + 6 + \frac{3}{2} = \frac{415}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 5f'(2) \end{aligned}$$

$$\text{الف) } \text{سرعت متوسط} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16$$

$$\text{ب) } h'(t) = -8t + 40 = 16 \Rightarrow t = 3$$

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \Rightarrow \text{آهنگ متوسط} = \frac{10 - 0}{4 - 0} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}(3x^2 + 2) + \sqrt{3x}(3x)$$

$$\text{ب) } g'(x) = 3(-2 \sin 2x)(\cos 2x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{3(x+1) - 1(3x-2)}{(x+1)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3x-2}}$$

$$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{الف) } \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 15$$

$$\text{ب) } f'(t) = 6t^2 + 1 \Rightarrow f'(2) = 25$$

$$\text{الف) } f'(x) = 5(x^2 + 2x - 1)^4(2x + 2)$$

$$\text{ب) } g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^2 + 1) + (\sqrt{3x+2})(3x^2)$$

۱۰

۱۱

۱۲

۱۳

۱۴

۱۵

۱۶

۱۷

۱۸



$$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x^\gamma - \cdot}{x - \cdot} = \cdot$$

$$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{-x^\gamma}{x - \cdot} = -\cdot$$

$$\Rightarrow f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)$$

۱۹

$f'(\cdot)$ موجود نیست.

نادرست

۲۰

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} f(x) = f(\cdot) = \cdot$$

۲۱

$$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x^\gamma - \cdot}{x - \cdot} = \cdot$$

$$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x - \cdot}{x - \cdot} = ۱$$

پس تابع مشتق پذیر نمی باشد. $f'_-(\cdot) \neq f'_+(\cdot)$

$$\text{الف)} f'(x) = \left(\frac{\gamma}{\gamma \sqrt{\gamma x + 1}} \right) (x^\gamma + 1) + (\gamma x^\gamma) (\sqrt{\gamma x + 1})$$

۲۲

$$\text{ب)} g'(x) = \gamma(\gamma x + \gamma)(x^\gamma + \gamma x + 1)^\gamma$$

$$\text{پ)} h'(x) = \frac{(\gamma x - \delta)(-\gamma x + \delta) - (-\gamma)(x^\gamma - \delta x + \gamma)}{(-\gamma x + \delta)^\gamma}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(\gamma) - f(\gamma)}{\gamma - \gamma} = \frac{\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma}}{\delta} = \frac{1}{\delta}$$

۲۳

$$\text{الف)} f'(x) = \gamma(\gamma x^\gamma + \sqrt{x} - 1)^\gamma \left(\gamma x^\gamma + \frac{1}{\gamma \sqrt{x^\gamma}} \right)$$

۲۴

$$\text{ب)} g'(x) = -\sin\left(\frac{x}{x^\gamma + 1}\right) \times \frac{(x^\gamma + 1) - \gamma x^\gamma}{(x^\gamma + 1)^\gamma}$$

$$f'_+(\gamma) = \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \frac{f(x) - f(\gamma)}{x - \gamma} = \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \frac{|x^\gamma - \gamma| - \cdot}{x - \gamma} = \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \frac{x^\gamma - \gamma}{x - \gamma} = \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \frac{(x - \gamma)(x + \gamma)}{x - \gamma} = \gamma$$

۲۵

$$f'_-(\gamma) = \lim_{x \rightarrow \gamma^-} \frac{-(x^\gamma - \gamma)}{x - \gamma} = \lim_{x \rightarrow \gamma^-} \frac{-(x - \gamma)(x + \gamma)}{x - \gamma} = -\gamma \Rightarrow f'_+(\gamma) \neq f'_-(\gamma)$$

تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.



