

نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۵/۰۲/۱۸

عنوان آزمون : هندسه ۳- تشریحی- فصل ۳- ۲ از ۲

۱ دو بردار  $\vec{a} = (-m, -1, -2)$  و  $\vec{b} = (0, -3, m+2)$  مفروض‌اند. اگر دو بردار  $\vec{a} - \vec{b}$  و  $\vec{a} + \vec{b}$  بر هم عمود باشند، آنگاه حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{a} \times \vec{b}$  ساخته می‌شود را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۲ برای هر دو بردار غیرصفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  ثابت کنید:  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ . (منظور از  $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$  قدرمطلق مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  می‌باشد).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

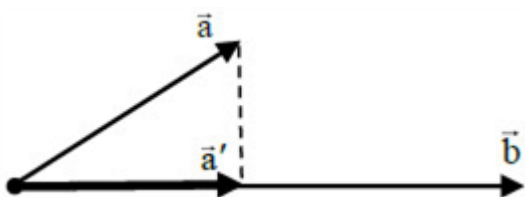
۳ اگر مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  ساخته می‌شود  $6\sqrt{3}$  باشد و  $\vec{a} = 4$ ،  $\vec{b} = 3$ ، حاصل  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$  را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۴ اگر  $\vec{a} = -\vec{i} - \sqrt{3}\vec{k}$  و  $\vec{b} = (\sqrt{3}, 2, 1)$  باشد. تصویر قائم بردار  $\vec{b}$  بر  $\vec{a}$  و اندازه بردار تصویر را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۵ نشان دهید: تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  روی بردار  $\vec{b}$  برابر  $\vec{b} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$  است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۶ بردارهای  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ،  $\vec{b} = (0, 1, 1)$  و  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$  بر سه یال یک متوازی‌السطوح منطبق هستند. اگر قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید شود، اندازه ارتفاع وارد بر این وجه را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۷ شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط  $-2 < y \leq -1$ ،  $y < -x^2 + 1$  را در فضای دو بعدی رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۸ ثابت کنید اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد  $\vec{b}$ ، برابر خود  $\vec{a}$  می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۹ اگر زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = (2, -1, n)$  و  $\vec{b} = (1, 0, -1)$  برابر با  $135^\circ$  درجه باشد، مقدار  $n$  را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۱۰ شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه  $x^2 \leq y \leq 2$  را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۱۱ بردارهای  $\vec{a} = (-2, 0, 2)$  و  $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$  را در نظر بگیرید.

الف) زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را به دست آورید.  
ب) تصویر قائم بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  را بر امتداد بردار  $\vec{b}$  به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۲ اگر طول بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  به ترتیب ۴ و ۶ و  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$  باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

۱۳ بردارهای  $\vec{a} = (2, -1, 1)$  و  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$  مفروض‌اند.

الف) زاویه بین دو بردار  $\vec{a} - \vec{b}$  و  $\vec{b}$  را به دست آورید.  
ب) مختصات بردار عمود بر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۱۴ اگر  $\vec{a} = (2, -1, 1)$ ،  $\vec{b} = (-1, 2, 0)$  و  $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$  باشد، تصویر قائم بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  بر امتداد بردار  $2\vec{c} - \vec{b}$  را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۱۵ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

حاصل عبارت  $\vec{i} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$  برابر صفر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۱۶ سه بردار  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$  و  $\vec{c} = (0, 2, 1)$  را در نظر بگیرید:

الف) طول بردار  $2\vec{b} - \vec{c}$  را به دست آورید.  
ب) مساحت متوازی‌الاضلاع که روی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{c}$  ایجاد می‌شود را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۱۷ سه بردار  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$  و  $\vec{c} = (0, 2, 1)$  در نظر بگیرید:

الف) زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  برابر با  $\theta$  باشد  $\cos \theta$  را بیابید.  
ب) تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر  $\vec{b} - \vec{c}$  را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱



۱۸

دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  مفروض اند به طوری که  $|\vec{a}| = ۶$  و  $|\vec{b}| = ۴$  و زاویه بین آن‌ها  $۳۰$  درجه است. مقدار عبارت  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۱۹

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.  
الف) حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی .....  
ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک ..... خواهد بود.  
پ) رأس سهمی به معادله  $y^2 + 2x - 2y = 0$  نقطه به مختصات ..... است.  
ت) حاصل ضرب خارجی دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  که با هم موازی هستند، برابر بردار ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۲۰

مساحت متوازی‌الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار  $\vec{a} = (3, 2, 1)$  و  $\vec{b} = (2, 0, 1)$  به وجود می‌آید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۲۱

نمودار مربوط به معادلات  $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  در فضای  $R^3$  چه شکلی است؟ و چه ارتباطی با نمودار  $x = 0$  دارد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۲۲

درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.  
نقطه  $A(2, -3, 0)$  روی صفحه XOY قرار دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸



# پاسخنامه تشریحی

بخش اول، به سه روش زیر قابل حل است:

۱

$$(\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \\ \begin{cases} (-m, 2, -m-4) \cdot (-m, -4, m) \\ = 0 \Rightarrow m = -2 \\ |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \Rightarrow m = -2 \end{cases} \end{cases}$$

چهارضلعی بنا شده روی بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  لوزی است  
 $\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow m = -2$

بخش دوم، به سه روش زیر قابل حل است:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-\epsilon, \epsilon, -\epsilon) \Rightarrow \begin{cases} V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = 72 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -\epsilon & 0 & -\epsilon \end{vmatrix} = 72 \Rightarrow V = 72 \\ h = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow V = Sh = |(\vec{a} \times \vec{b})|^2 = 72 \end{cases}$$

روش اول: فرض می‌کنیم  $\theta$  زاویه بین دو بردار غیرصفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  باشد، در این صورت:

۲

$$|\cos \theta| \leq 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

روش دوم: فرض می‌کنیم  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  در این صورت:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \Leftrightarrow$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \Leftrightarrow$$

$$a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + 2a_1 b_1 a_3 b_3 + 2a_2 b_2 a_3 b_3 \leq$$

$$a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 b_1 a_3 b_3 + a_3^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_2 a_3 b_3 + a_3^2 b_2^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$$

چون رابطه اخیر همواره درست بوده و روابط بالا بازگشت‌پذیرند پس حکم همواره برقرار است.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \epsilon \sqrt{3}, \sin \theta = \frac{\epsilon \sqrt{3}}{\epsilon \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{3}$$

۳

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 4^2 - 4 \times 3 \times \left(\pm \frac{1}{3}\right) = 16 \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a \cdot (a - b) = 10 \\ a \cdot (1 - b) = 22 \end{cases}$$

۴

$$\vec{a} = (-1, 0, -\sqrt{3})$$

$$\vec{b}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} (-1, 0, -\sqrt{3}) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2} \right), |\vec{b}'| = \sqrt{3}$$

۵

روش اول: بردار  $\vec{a}'$  با بردار  $\vec{b}$  موازی است،  $\vec{a}' \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = k \vec{b}$  (ص ۷۹)

$$(\vec{a} - \vec{a}') \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - (k \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = k \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

روش دوم: در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را  $\theta$  می‌نامیم

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \theta$$

$$\vec{a}' = k \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}'| = k |\vec{b}| \Rightarrow k = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}| |\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|^2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\vec{a}' = k \vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

۶

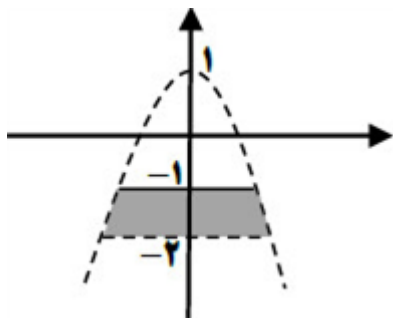
حجم متوازی‌السطوح برابر با حاصل‌ضرب ارتفاع در مساحت قاعده است. (ص ۸۳)

حجم متوازی‌السطوح برابر  $2$  است.  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1)| = 2$

مساحت قاعده این متوازی‌السطوح که توسط بردارهای  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید می‌شود برابر با:  $|\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{3}$  است.

$$h = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

در نتیجه:



(ص ۶۳)

۷



$$\vec{a} = r \vec{b}$$

۸

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{(r \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{r |\vec{b}|^2}{|\vec{b}|} \vec{b} = r \vec{b} = \vec{a} \quad (\text{ص } ۸۰)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - n}{\sqrt{2} \times \sqrt{4 + 1 + n^2}} \Rightarrow \frac{n - 2}{\sqrt{n^2 + 5}} = 1$$

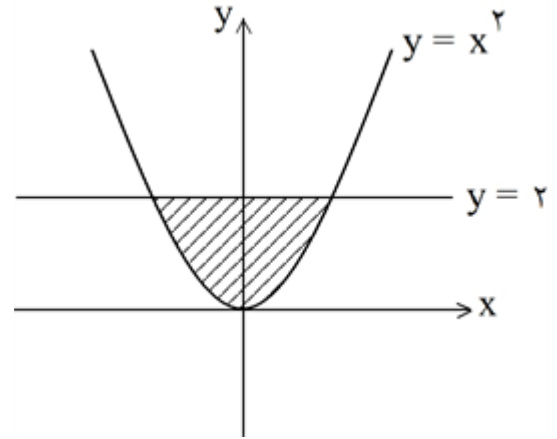
۹

$$n^2 + 5 = n^2 - 4n + 4 \Rightarrow n = -\frac{1}{4} \quad (\text{ص } ۷۸)$$

رسم نمودار (ص ۵۵)

۱۰

$y = x^2$  نمودار یک سهمی است و  $y \geq x^2$  داخل این سهمی است و  $y \leq 2$  نقاط زیر خط  $y = 2$  هستند، پس ناحیه  $x^2 \leq y \leq 2$  هاشورخورده می‌باشد.



$$\text{الف) } \vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 0, 2) \cdot (0, 2, 2) = 4 \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$$

۱۱

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-2, 0, 2) + (0, 2, 2) = (-2, 2, 4)$$

$$\text{ب) } (\vec{a} + \vec{b})' = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{12}{2} (0, 2, 2) = (0, 2, 2)$$



$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{12}{4 \times 6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad (0/25)$$

روش اول: ۱۲

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \quad (0/25)$$

روش دوم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \quad (0/25) \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (12)^2 = (4)^2 (6)^2 \quad (0/5)$$

$$\rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 12\sqrt{3} \quad (0/25)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = 6\sqrt{3} \quad (0/25)$$

مساحت مثلث برابر است با:

الف)  $\vec{a} - \vec{b} = (1, 0, 1)$

۱۳

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = |\vec{a} - \vec{b}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 1 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

ب)  $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\vec{i} + 1\vec{j} - \vec{k} = (1, 1, -1)$

پاسخ نهایی به یکی از دو صورت  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  یا  $(1, 1, -1)$  یا مضاربی از بردار حاصل مورد پذیرش است.

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = (1, 1, 1)$$

۱۴

$$\vec{v} = 2\vec{c} - \vec{b} = (3, -4, 0) \Rightarrow |\vec{v}| = 5, \vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \vec{v} \Rightarrow \vec{u}' = \left( -\frac{3}{25}, \frac{4}{25}, 0 \right) \quad (ص ۷۵ و ۸۴)$$

درست (ص ۸۱) ۱۵

الف)  $2\vec{b} = (2, 0, 2), |2\vec{b} - \vec{c}| = |(2, -2, 1)| = 3 \quad (ص ۷۶)$

۱۶

ب)  $\vec{b} + \vec{c} = (1, 2, 2) \quad (ص ۸۱)$

$$S = |\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})| = |(1, -5, 1)| = 3\sqrt{11}$$



الف)  $\vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, 0, 1)$

۱۷

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 1 = \sqrt{14} \sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{7}} \text{ (ص ۷۸)}$$

ب)  $\vec{d} = \vec{b} - \vec{c} = (1, -2, 0)$  (ص ۷۹)

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} \vec{d} = \frac{-4}{5} (1, -2, 0)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ = 2(6)(4) \left(\frac{1}{2}\right) = 24 \text{ (ص ۸۱)}$$

۱۸

الف) ندارد (۱۹)      ب) بیضی      پ)  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$       ت) صفر

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, 2, 1) \times (2, 0, 1) = (2, -1, -4)$$

۲۰

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21}$$

محور  $yz$  صفحه  $x = 0$  معادله  $x = 0$  معادله  $yz$  که شامل محور  $yz$  است.  $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

۲۱

درست (۰/۲۵)

۲۲



