

۱ وضعیت دو دایره $C : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ و $C' : (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۲ در نقطه $A(-1, 0)$ روی دایره $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 20$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را بدست آورید.

۳ معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(1, -1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $4x - 3y = 2$ و تری به طول ۶ جدا کند

۴ سهمی به معادله $y^2 - 4x = 4y$ داده شده است. مختصات رأس و کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

۵ مقدار m را چنان تعیین کنید که دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 2y + m = 0$ با دایره به مرکز $O(2, -3)$ و شعاع ۳ مماس بیرون باشد.

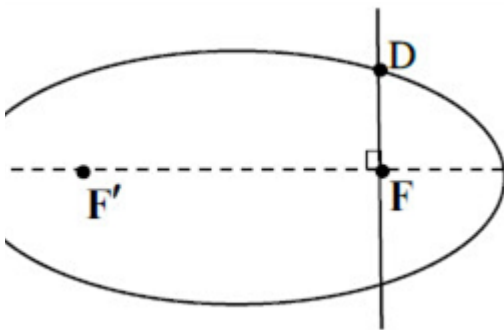
۶ معادله دایره‌ای را بنویسید که خطهای $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن باشند و روی خط به معادله $x + y = 2$ و تری به طول $2\sqrt{2}$ ایجاد می‌کند.

۷ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ بوده و با دایره $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ مماس داخل باشد.

۸ سهمی با رأس $A(1, 2)$ و کانون $F(1, -2)$ مفروض است. معادله سهمی و خط هادی آن را بنویسید.

۹ بیضی با قطر بزرگ $2a$ ، قطر کوچک $2b$ و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر خطی در کانون F قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطه D قطع کند، ثابت کنید:

$$r = \frac{b^2}{a}$$



۱۰ در دایره به معادلهٔ ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ با استفاده از روش مربع کامل، ثابت کنید شعاع دایره برابر

$$\text{با } r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ است.}$$

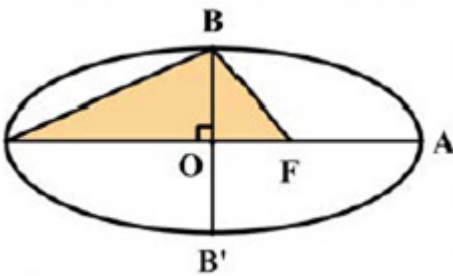
۱۱ معادله گسترده دایره $C(O, R)$ به شکل $x^2 + y^2 + 2y - 4x - 4 = 0$ است.

الف) مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید.
ب) آیا نقطه $A(0, 3)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟

۱۲ اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد:

الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است)

ب) مساحت مثلث هاشورخورده (BFA') چقدر است؟



۱۳ معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(0, 1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x + y = 2$ وترى به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند

۱۴ در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.

۱۵ الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی $x^2 - 4y + 8x = 0$ را به دست آورید.
ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

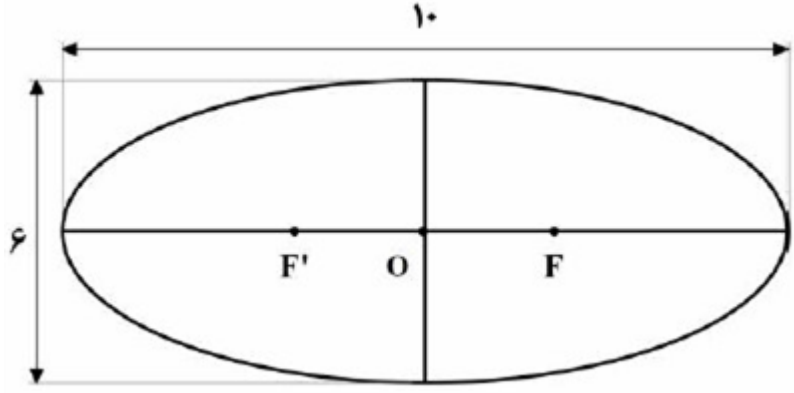
۱۶ نقطه دلخواه M روی سهمی مفروض است. ثابت کنید هر دایره به مرکز M که از کانون سهمی بگذرد، بر خط هادی سهمی مماس است.

۱۷ معادله سهمی را بنویسید که خط هادی آن $y = -2$ و کانون آن $F(1, -4)$ باشد.

۱۸ وضعیت خط $x + y = 1$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

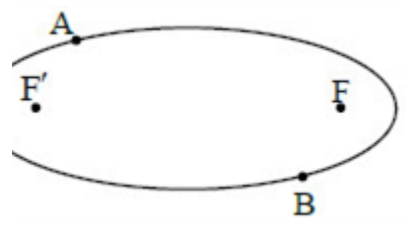
۱۹ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(1, -1)$ و بر خط $3x - 4y + 3 = 0$ مماس باشد.

در بیضی زیر فاصله کانونی را محاسبه کنید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند).



درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید.
 - اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

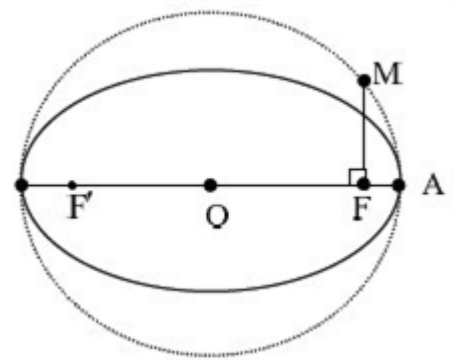
دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی اند اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی اند.



اگر معادله دایره به شکل $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ باشد:
 الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.
 ب) مختصات تقاطع دایره با محور xها را پیدا کنید.

معادله سهمی را بنویسید که رأس $A(4, 6)$ و $y = 3$ معادله خط هادی آن باشد.

قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



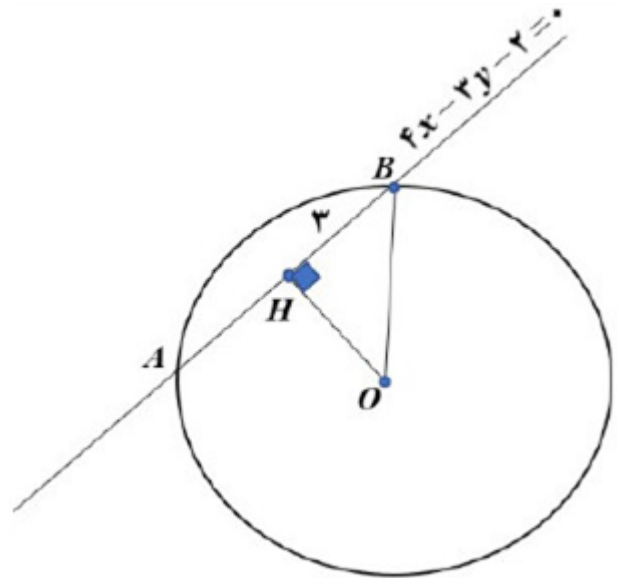
$$, -1) \quad O'(-3, 2) \Rightarrow OO' = 5 \quad \left. \begin{array}{l} r=1 \quad r'=2 \\ OO' > r+r' \end{array} \right\} \rightarrow \text{دو دایره متخارج هستند.}$$

توجه: به جای «دو دایره متخارج هستند»، نوشتن جمله «نقطه برخورد ندارند» نیز قابل قبول است.

$$4) \quad m_{OA} = 2 \Rightarrow m' = -\frac{1}{2}$$

$$\cdot = -\frac{1}{2}(x+1) \text{ یا } y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ یا } x + 2y = -1$$

شعاع عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند، لذا $HB = 3$. (یا تعیین HB روی شکل)



$$= \frac{|4 + 3 - 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow r^2 = OH^2 + HB^2 = 1 + 9 = 10$$

$$-1)^2 + (y+1)^2 = 10 \text{ معادله دایره:}$$

$$-4y = 4x \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 4x + 4 \Rightarrow (y-2)^2 = 4(x+1)$$

لذا سهمی فوق یک سهمی افقی رو به راست می‌باشد و در آن داریم:

$$+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow S(-1, 2) \text{ راس سهمی, } 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

$$1 - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

خط هادی $x = -2$, کانون (2)

$$, -3), r = 3$$

$$-1, 1), r' = \frac{1}{r} \sqrt{16 - 4m} = \sqrt{2 - m}$$

$$OO' = \sqrt{9 + 16} = 5, r + r' = d \Rightarrow 3 + \sqrt{2 - m} = 5 \Rightarrow \sqrt{2 - m} = 2$$

$$-m = 4 \Rightarrow m = -4$$

$$+y = 1 \Rightarrow O(2, -1) \Rightarrow OH = \frac{1}{\sqrt{2}}, r^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \frac{5}{2}$$

$$-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{2}$$

$$-\Gamma)^r + (y - 3)^r = 16 \Rightarrow O'(\Gamma, 3), r' = 4 \text{ (ص ۴۴)}$$

$$OO' = \sqrt{(\cdot - \Gamma)^r + (1 - 3)^r} = \sqrt{8}$$

$$r'| = d \Rightarrow |r - 4| = \sqrt{8} \Rightarrow r = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

$$-\cdot)^r + (y - 1)^r = (4 \pm 2\sqrt{2})^r$$

۸ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی قائم و دهانه آن به سمت پایین می‌باشد.

فاصله کانونی سهمی برابر با $a = AF = 4$ است.

معادله آن برابر است با: $(x - 1)^r = -16(y - 2)$

معادله خط هادی سهمی $y = 6$ است. (ص ۵۸)

$$DF + DF' = 2a$$

۹ نقطه D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی:

در مثلث قائم‌الزاویه DFF' قضیه فیثاغورت داریم:

$$DF + FF' = DF' \Rightarrow DF^r + (\Gamma c)^r = (\Gamma a - DF)^r$$

$$= \frac{a^r - c^r}{a} \xrightarrow{a^r - c^r = b^r} DF = \frac{b^r}{a}$$

$$-y^r + ax + by + c = \cdot \Rightarrow \left(x^r + ax + \frac{a^r}{4}\right) + \left(y^r + by + \frac{b^r}{4}\right) = -c + \frac{a^r}{4} + \frac{b^r}{4}$$

$$+\frac{a}{r})^r + \left(y + \frac{b}{r}\right)^r = \frac{a^r + b^r - 4c}{4} \Rightarrow r^r = \frac{a^r + b^r - 4c}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{a^r + b^r - 4c}}{r}$$

ص)

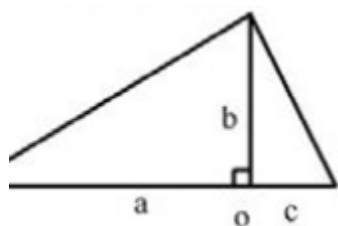
$$) O\left(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}\right) = (\Gamma, -1), R = \frac{1}{r}\sqrt{a^r + b^r - 4c} = 3$$

۱۱ (ب) خیر زیرا: $(\cdot)^r + (3)^r + 2(3) - 4(\cdot) - 4 \neq 0$

$$a = 5 \Rightarrow c^r = 25 - 16 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow A'F = 8$$

$$b = 4$$

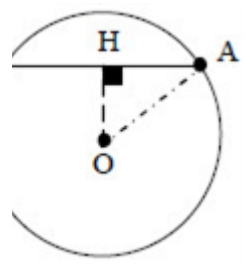
۱۲ (ب)



$$S_{\Delta} = \frac{1}{r}(\omega + 3) \times 4 = 16$$



از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند. (ص ۴۳)



$$OH = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow OA^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} = R^2$$

معادله دایره $x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$

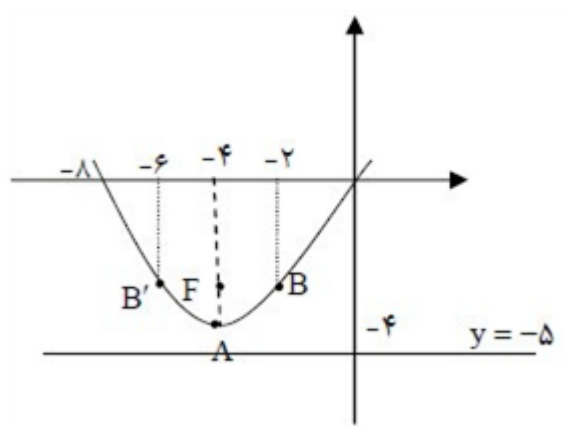
اگر قطر دهانه دیش را با r و گودی را با h نمایش دهیم. فاصله کانونی برابر $a = \frac{4r^2}{16h}$ است.

$$a = \frac{(2r)(2r)}{16h} = \frac{60 \times 60}{16(9)} = 25$$
 اگر $r = 60, h = 9$ با جایگذاری در رابطه فوق داریم:

$$a = \frac{r^2}{4h} = \frac{(30)^2}{4(9)} = 25$$
 (اگر رابطه فوق به صورت $a = \frac{r^2}{4h}$ نوشته شود درست است.)

الف) فرم استاندارد سهمی به صورت $(x+4)^2 = 4(y+4)$ است. سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا باز می‌شود. سهمی نقطه $A(-4, -4)$ است و $a = 1$ ، مختصات کانون آن نقطه $F(-4, -3)$ است. معادله هادی سهمی به صورت $y = -4 - 1 = -5$ است.

ب) نقاط کمکی $B(-2, -3)$ و $B'(-6, -3)$



رسم سهمی با استفاده از نقاط کمکی

از آنجایی که M نقطه‌ای روی سهمی است، در نتیجه فاصله M از کانون و خط هادی برابر است. پس هر دایره که مرکز آن نقطه M بوده و از کانون بگذرد شعاعی برابر MF خواهد داشت. و بنابراین دایره به مرکز M شعاع MF بر خط هادی سهمی مماس است.

$$(1, -3), a = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = -4(y+3)$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 4, O = (1, 1), r = 2, d = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

r

خط و دایره در دو نقطه متقاطع هستند.



$$\frac{|\mathcal{P}(1) - \mathcal{K}(-1) + \mathcal{M}|}{\sqrt{\mathcal{P}^2 + \mathcal{K}^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \quad (\text{ص } 143)$$

$$= b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5, b=3} c = 4 \Rightarrow FF' = 8$$

۱۹

۲۰

۲۱ درست (ص ۳۵)

۲۲

نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم. نقطه A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی

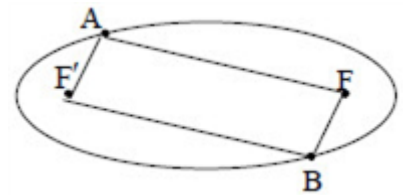
$$+ AF' = 2a \quad (1)$$

نقطه B روی بیضی قرار دارد.

$$+ BF' = 2a \quad (2)$$

از ۱ و ۲ و فرض $(AF' = BF)$ نتیجه می‌شود. $AF = BF'$

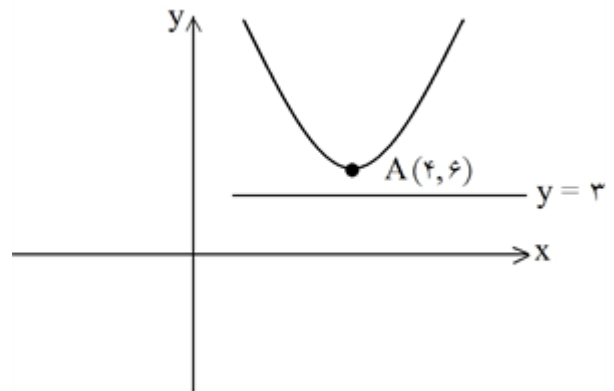
بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ یک متوازی‌الاضلاع است در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند. $AF \parallel BF'$



۲۳

$$) O(-1, 0), R = 2$$

$$1, 0), (-3, 0)$$



۲۴

با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، سهمی قائم و دهانه سهمی رو به بالا است و $a = 3$

$$(x-h)^2 = 4a(y-k) \Rightarrow (x-4)^2 = 12(y-6) \quad \text{فرم استاندارد سهمی به صورت:}$$

$$= OA = a$$

۲۵

$$F : OF^2 + MF^2 = OM^2 \Rightarrow c^2 + MF^2 = a^2 \Rightarrow MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$



